

I)

مقدار و مقدار بردار ویژه :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

معادله $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_i \Rightarrow \text{Spectrum} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$

مجموعه ابر ویژه A اصطلاح طیف λ Spectrum نامیده می شود.

بزرگترین مقدار ویژه نیز شعاع طیف $\rho(A)$ Spectral radius نامیده می شود.

$$\text{Spectral radius} = \rho(A) = \max \{ |\lambda_i| \} = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

همچنین بردار v که در رابطه زیر صدق کند، بردار ویژه A نامیده می شود.

$$(\lambda I - A)v = 0$$

معمولاً اینگونه بردار ویژه v که این رابطه برقرار است، نرمال شده و بردار v از بردارهای

نرمال - منظور خالص بردارهای ویژه استفاده می شود.

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2 + \dots + v_{1n}^2} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال :

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}$$

$$(\lambda I - A)u_i = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این دستگاه را با هم حل شود

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 1 \rightarrow x_2 = 1$$

بنابراین بردار $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

For: $d_2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \end{bmatrix}$

با دست، eig ، مقاب این مقدار را کامپیوتر و به روش دیگر که می‌توانیم آن چیست؟

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[v, D] = eig(A)$$

مقدارهای نرم $\| \cdot \|$

یکی از راهکارهای تعریف شده است سیستم نرمی، به گونه‌ای که از آن به شکل استفاده می‌شود. به عنوان مثال کارایی ردیابی سیستم می‌تواند براساس آن به گونه‌ای خاص ردیابی به این روش.

نرم $\| \cdot \|$: باید در این خواص بررسی شود:

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

نوعی مثلثی

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Triangular inequality

نرم بردار دترمینس :

$$u_{n \times 1} = [u_1 \dots u_n]^T$$

بردار u با n صفت

در نظر بگیرید. طبق تعریف برای بردار u ، نرم p بردار u عبارت است از :

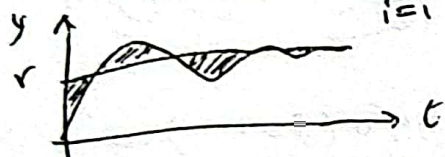
$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p}$$

p که عدد صحیح مثبت است. با این تعریف، نرم های زیر عمومی مورد استفاده قرار می گیرند.

* نرم یک $(p=1)$: برابر با حاصل جمع اندازه مولفه های آن بردار است. بین راضی این جمله

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|$$

عبارت است از :



$IAE = \int_{-\infty}^{\infty} |e| dt$ به عنوان مثال نرم یک سیگنال که در ادامه پهنای آن و فراوانی آن

* نرم دو $(p=2)$: برابر با مجذور حاصل جمع توان دوم مولفه های آن بردار است. بین راضی

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2}$$

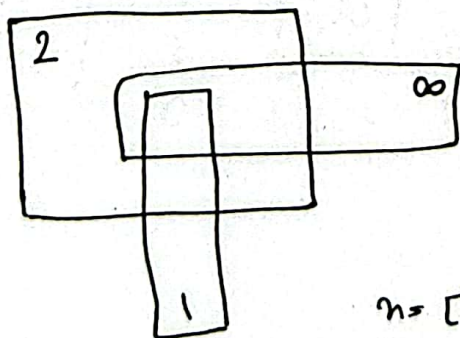
آن عبارت است :

* نرم بینهایت $(p=\infty)$: اندازه بیشینه مولفه یک بردار، طبق تعریف برابر با نرم یک است $(p=1)$

بردار است. بین راضی این جمله عبارت است از :

$$\|u\|_{\infty} = \max |u_i|$$

همچنین بین انواع نرم در بین بردارها :



مثال: برای بردار $u = [1 \ 4 \ 9]^T$

$$u = [1 \ 4 \ 9]^T$$

$$\text{norm}(u, 1)$$

$$\text{norm}(u, 2)$$

$$\text{norm}(u, \infty)$$

مقدار نرم ها را بنویسید :

* نرم ماتریس: بر مبنای تعریف نرم بردار، می‌توان، نرم ماتریس را تعریف و بسط داد. (مانند حالت به نرم ماتریس اصطلاحاً نرم آهاری $induced\ norm$ گفته می‌شود)

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & \dots & \dots & a_{nj} \end{bmatrix}$$

ماتریس $n \times m$

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (x \neq 0)$$

نرم ماتریس آهاری A برابر است با:

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

و به عبارت دیگر

با این تعریف، نرم‌های زیر عموماً برای ماتریس‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند:

* نرم یک ($p=1$) ماتریس: بیشینه یک بردار از حاصل جمع اندازه مولفه‌های (هر ستون) از ماتریس

این در ردیف، آنگاه بیشینه عضو آن بردار برابر با نرم یک ($p=1$) ماتریس است.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

* نرم بینهایت ($p=\infty$) ماتریس: بیشینه یک بردار حاصل جمع اندازه مولفه‌های (هر سطر) از ماتریس

این در ردیف، آنگاه بیشینه عضو آن بردار برابر با نرم بینهایت ($p=\infty$) ماتریس است

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

III

* نرم دو ($p=2$) ماتریس: برای یک سب نرم 2 باید بردار را به سب که در سب 2

$\|x\|_2 = 1$ صدق کند به گونه ای که حاصل ضرب آن در A سب شود نرم دو Ax بیشینه گردد.

این بردار در واقع بردار ویژه ماتریس A مضارب به مقدار ویژه بیشینه است:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \sigma_{\max}(A)$$

به عبارت دیگر نرم دو یک ماتریس برابر و غیر مقدار ویژه بیشینه ($\lambda_{\max}$) ماتریس گرانژاده فریب و سب

A (که A^* نشان داده شده) در A است. به عبارت دیگر نرم دو یک ماتریس برابر به

بزرگترین مقدار کینس (Singular Value) ماتریس $\sigma_{\max}$ است.

* نرم فریب و سب ($p=F$) ماتریس: برای یک سب آن داریم:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(AA^*)}$$

که مقدار tr جمع سلفه های قطری ماتریس است. (سب بیشینه نرم 2 است)

مثال: نرم 2، ∞ ، F ماتریس در یک سب سب.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

* نرم L^p : نرم است :

سینال ها که در دسته اول قرار می گیرند اندازة آنها بر مبنای نرم تعریف می شود.

+ توجه : در بخش های قبلی نرم بردارها بر اساس ویژگی های فضاها و مقایسه R^n تعریف شده بود. این ریاضیات که در این بخش، بعد از این توابع صدق خواهد بود.

* نرم L^p : طبق تعریف اندازة L^p سینال $u(t)$ در حوزه زمان از طریق نرم L^p سینال

$$\|u(t)\|_p = \left(\int_0^\infty |u(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

تعریف می شود :

که در آن $p \in \mathbb{R}$ و $p > 0$ است.

* نرم یک $(p=1)$ سینال : کمینه نرم یک بردار، نرم یک سینال برابر با حاصل جمع اندازة مولفه های

آن سینال در طول بازه زمانی است. بیان ریاضی این عبارت عبارت است از :

$$\|u(t)\|_1 = \int_0^\infty |u(t)| dt$$

معنی : Integral of absolute error (IAE) همان مقدار مثل از این نوع است.

* نرم دو $(p=2)$ سینال : از نظر فیزیکی نرم دو سینال، برابر با اندازة انرژی سینال است.

$$\|u(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty u^2(t) dt}$$

* نرم بینهایت $(p=\infty)$ سینال : از نظر فیزیکی نرم بینهایت سینال، بیانگر کران بالای سینال

$$\|u(t)\|_\infty = \sup_t |u(t)|$$

است.

(IV)

از نظر ریاضی مقدار b طبق تعریف کران بالا (Upper Bound) مجموعه A است اگر برای

$$x \in A, x \leq b$$

خوبه که b کمترین کران باشد (Least upper bound) مجموعه A باشد. آن را b و $upper$

Supremum و sup گفته می شود.

توجه: لازم نیست که b حتماً عضوی از مجموعه A باشد. اگر b عضو مجموعه A باشد

اصطلاحاً به آن max گفته می شود.

تعریف: طبق تعریف c کران پایین مجموعه A است اگر برای همه اعضای A :

$$x \in A, x \geq c$$

خوبه که c بزرگترین کران پایین (Greatest lower Bound) مجموعه A باشد. آن را c و $lower$

infimum و inf گویند.

توجه: لازم نیست که c حتماً عضوی از مجموعه A باشد. اگر c عضو مجموعه A باشد اصطلاحاً

به آن min گویند.

مثال: نرم سیدل زیر را به ازای مقادیر $a=2$ ، $b=3$ حساب کنید.

$$x(t) = \frac{1}{at+b}$$

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^b x^2(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.408$$

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_t |x(t)| = \frac{1}{b} = \frac{1}{3} = 0.333 \quad (\text{حداکثر})$$

* نرم سیم : اندازگی که سیم در شکل تابع تبدیل در حوزه فرکانس ورودی به نرم 2
و بنیاد اندازگی می شود.

* نرم 2 سیم : اندازگی که در مقادیر مربع اشتراک خروجی برابر با نرم در سیم است هنگامی که
ورود سیگنال ضرب باشد. برای سیم های پدیدار می توان نرم دو را از قضیه پاراول

(Parseval's Theorem) تعریف نمود.

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trac} (G^*(j\omega) G(j\omega)) d\omega \right]^{1/2}$$

نرم $G^*(j\omega) = G^T(-j\omega)$

* نرم بنیاد سیم : اگر $u(t)$ و $y(t)$ ورودی و خروجی سیم باشند، نگاه رابطه کلی برای
تعریف نرم بنیاد سیم از نرم آلفای زیر تعریف می شود.

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{u(t) \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}$$

برای سیم های که فاقد قطب موهومی بر روی محور لب باشند، می توان نرم بنیاد را به

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

صورت زیری می نمود.

در حقیقت نرم بنیاد برابر با مقدار بیشینه اندازگی سیغ فرکانس است.

مثال : نرم سیم را می بیند :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} \\ \frac{2s}{s+1} \end{bmatrix}$$

حل : چون تابع تبدیل به صورت ماتریس است

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| = \sup_{\omega} \sqrt{\lambda_{\max}(G^*(j\omega) G(j\omega))}$$

(VI)

$$G^*(j\omega) G(j\omega) = G^T(-j\omega) G(j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{2}{10-j\omega} & \frac{20}{1-j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{1+j\omega} \\ \frac{20}{1+j\omega} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2^2}{10^2 + \omega^2} + \frac{20^2}{1^2 + \omega^2}$$

$$\|G(j\omega)\|_{\infty} = \sqrt{\frac{2^2}{10^2} + 20^2} \approx 20$$

این تابع در ω بیشینه است:

$$\|G(j\omega)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$$

به منظور یافتن نرم 2 نبرداریم:

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (G^*(j\omega) G(j\omega)) d\omega \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2^2}{10^2 + \omega^2} + \frac{20^2}{1^2 + \omega^2} \right) d\omega \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{5} \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) + 20^2 \arctan(\omega) \right]_{-\infty}^{+\infty} \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{5} + \frac{20^2}{2} \right]^{1/2} = 14.1492 \approx \frac{20}{\sqrt{2}}$$

Matlab, >

$$s = tf('s')$$

$$G = [2/(s+10) ; 20/(s+1)]$$

$$n2 = \text{norm}(G, 2)$$

$$ninf = \text{norm}(G, 'inf')$$

مثال، نرم دو-نرم و بیشینه ماتریس تبدیل نبرداری است:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{10}{s+1} \end{bmatrix}$$

حل: برای این ماتریس تبدیل، نرم 2 نبرداری است
زیرا دایره قطب در مبدأ است

الگوریتم‌های کلاسیک برای حل در فضای حالت سیستم

* کلاسیک برای دو (در فضای حالت)

طبق تعریف نرم دو کلاس تبدیل (نرم برابر است):

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(G^*(j\omega) G(j\omega)) d\omega \right]^{1/2}$$

با توجه به اینکه $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ است، پس نرم 2 آن می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$\|G\|_2 = \|g\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(\dot{g}^*(t) \cdot g(t)) dt \right]^{1/2}$$

برای اینکه نرم دو سیستم محدود باشد، سیستم باید Proper و $m < n$ باشد. (ناتوانی)

فضای حالت سیستم برابر است:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad D = 0$$

$$y = Cx$$

$$\Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[C(sI - A)^{-1}B]$$

$$= \begin{cases} C e^{At} B & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\|G\|_2 = \|g\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(\bar{g}(t)^T g(t)) dt \right]^{1/2} \quad 1/2$$

$$= \left[\int_0^{\infty} \text{trace}((C e^{At} B)^T (C e^{At} B)) dt \right]^{1/2}$$

$$= \left[\text{trace}(B^T (\int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt) B) \right]^{1/2}$$

(VII)

$$S = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$$

$S =$ گرامین رویت پذیری (A, C) (Observability Gramian)

(1) $\|G\|_2 = \|g\|_2 = [\text{trace}(B^T S B)]^{\frac{1}{2}}$ نمایی شود

به طریق مشابه می توان نوشت:

$$\|G\|_2 = \|g\|_2 = [\text{trace}(C(\int_0^{\infty} e^{A^T t} B B^T e^{A t} dt) C^T)]^{\frac{1}{2}}$$

$U = \int_0^{\infty} e^{A^T t} B B^T e^{A t} dt$ گرامین کنترل پذیری (A, B)

$\|G\|_2 = \|g\|_2 = [\text{trace}(C U C^T)]^{\frac{1}{2}}$ گرامین کنترل پذیری (A, B)
 نرم در سیستم همبندی فراهم شد

با به S و U یعنی گرامین های رویت پذیری و کنترل پذیری می توان مقدار نرم سیستم در فضای حالت های به کرد.

اثبات: $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} C^T C e^{A t}) dt$

$$= \int_0^{\infty} (A^T e^{A^T t} C^T C e^{A t} + e^{A^T t} C^T C e^{A t} A) dt = A^T S + S A$$

از طرفی می توان این مشتق گیری را با استفاده از انتگرال کامل حل نمود.

$$\frac{dS}{dt} = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} C^T C e^{A t}) dt = e^{A^T t} C^T C e^{A t} \Big|_0^{\infty}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A t} = 0 \text{ (مستقر)}, e^{A \cdot 0} = I$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad - \quad I C^T C I = - C^T C = - Q$$

در نتیجه برای سبب نرم 2 داریم: (در فضا حالت سیستم)

$$S A + A^T S + Q = 0 \quad Q = C^T C$$

یا رتبه 1
ت سبب آراجه
بماند صحت نیت

جمله
نرم
نوع 2 یا 2 یا 2 یا 2

همچنین به صورت ماتریس به جای آن که یک پیری

$$A U + U A^T + B B^T = 0$$

سین لایحه 5 یا 5 از

رابطه در دین و رابطه نرم گذاشته و
تعدادی از سبب شوا

گرام، نرم 2 سطح در لایحه سبب نشود :
که در این حالت به دست می آید

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

* الگوریتم حساب نرم پیری : به مسئله ریاضی نرم پیری تبدیل الگوریتم های نرم و در هر دو

در این 2 روش همانند است :

روش اول : مقدار $\|G\|$ برابر با بیشترین مقدار تابع تبدیل G در حوزه فرکانس است

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega)| = \sup_{\omega} \sqrt{\lambda_{\max} \left(\overline{G(j\omega)}^T G(j\omega) \right)}$$

همان (نوع 2) که در آن به بیشترین مقدار اشاره دارد که بیشترین مقدار ممکن است

VIII

ادرس هم می توان از قضیه زیر برای کاسه کردن با این نرم بنویسید به این نرم بنویسید
استفاده نمود.

قضیه: اگر معادلات حاکم بر سیستم به صورت زیر بنویسید داد شوند

$$\lambda \leq A u + B u$$

$$y = C u + D u \iff G u = C (I - A)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

پس عددی مانند δ وجود خواهد داشت که $\|G\|_\infty < \delta$ ، اگر در نظر بگیریم $\delta(D) < \delta$
و ماتریس زیر هیچ مقدار مثبتی در روی محور صاف نمی باشد:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A + B V^{-1} D^T C & B V^{-1} B^T \\ -C^T (I + D V^{-1} D^T) C & -(A + B V^{-1} D^T C)^T \end{bmatrix}$$

که در آن $V = I - D^T D$ است.

برای به کار گیری این قضیه در کاسه کردن، خاصیت قابل قبول δ در کاسه نرم بنویسید
در نظر گرفته شود، آنگاه آنگاه آنگاه نرم بنویسید کاسه نرم بنویسید به کار می رود.

۱- کران بالا را پس $\|G\|_\infty$ را حدس بنویسید $(\delta < \|G\|_\infty < \delta)$

به عنوان مثال کران پایین صفر و کران بالا یک عدد بزرگ در نظر بگیرید.

۲- اگر $\delta \leq 2\delta$ / $(\delta - \delta)$ باشد پس $\frac{(\delta - \delta)}{2} = \|G\|_\infty$ است و آنگاه نرم بنویسید

در غیر این صورت $\delta = \frac{\delta + \delta}{2}$ قرار دهید.

۵- به مرحله ۲ برنگردیم و به صورت باز بنویسید
تفاوت عددی را کم کنید

۳- مقدار δ را در ماتریس Γ جایگزین کنید.

۴- اگر معادله درجه دوم را بنویسید آنگاه $\delta = \delta$ قرار دهید در غیر این صورت $\delta = \delta$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{مثال}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

به عنوان تمرین با استفاده از

Matlab، با استفاده از دستور رسم و سپس با استفاده

از روش هم مقدار $\|G\|_1$ را محاسبه کنید.

* رابطه بین نرم گینال و نرم سیستم

یک سیستم خطی با ورودی u و خروجی y را در نظر بگیرید فرض کنید که تابع تبدیل آن G باشد.

پایدار و کلاسیک شده باشد، ارتباط بین ورودی و خروجی و تابع تبدیل سیستم به ازای دو ورودی ضربه

در ورودی سینوس را بدست آوریم:

به توصیف این رابطه بین ورودی و خروجی و تابع تبدیل به صورت زیر است:

$$y(\omega) = G(\omega) u(\omega)$$

الف) به ازای $u(\omega) = 1$ ضربه طاق:

$$y(\omega) = G(\omega) \Rightarrow$$

$$\|y(\omega)\|_2 = \|G(\omega)\|_2$$

$$\|y(\omega)\|_\infty = \|G(\omega)\|_\infty$$

ب) به ازای $u(t) = \sin(\omega t)$

$$y(t) = |G(\omega)| \sin(\omega t + \arg(G(\omega)))$$

همانطور که مشاهده می شود $|G(\omega)| \neq 0$ لذا انداز، اشباع کننده این گینال در طول زمان به صورتی نخواهد بود.

IX

لذا $\|y\|_2$ برابر با بیشترین مقادیر خواهد بود.

از طرفی $\max (\sin(\omega t + \arg(u(\omega))) = 1$ و لذا بیشترین مقدار $y(t)$ برابر با

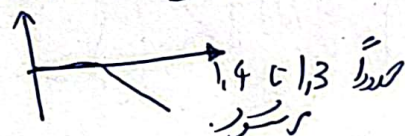
$|G|$ خواهد شد. بنابراین $\|y\|_\infty = |G|$ است.
 نرم ∞ به معنای بیشترین مقدار $|G|$ است.
 نرم 1 به معنای مجموع مقادیر $|G|$ است.

به صورت خلاصه خواص داریم:

در جدول زیر نرم های مختلف را مقایسه می کنیم.

	$u(t) = \delta(t)$	$u(t) = \sin(\omega t)$
$\ y\ _2$	$\ G\ _2$	∞
$\ y\ _\infty$	$\ G\ _\infty$	$ G $

همانطور که در جدول بالا می بینیم



حال اگر ورودی مشخص نباشد (مثلاً در صورت احتیاط) اما اگران بالای نرم دو به نرمی تبدیل می شود

ورودی های ممکن به همراه نرم تابع مشخص باشد. باید باز هم می توان در مورد کران بالای نرم تبدیل

خارجی صحبت نمود؟
 $\|G\|_\infty = \frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_\infty}$
 $\|G\|_\infty$ به معنای بیشترین مقدار $|G|$ است.

آنهاست:
 $\|G\|_\infty$ به معنای بیشترین مقدار $|G|$ است.
 $\|G\|_2$ به معنای مقدار $|G|$ است.

$$\|y(t)\|_2^2 = \|y(\omega)\|_2^2$$

$$G = \frac{1}{Ts+1}$$

$$u = 1/s$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 |u(\omega)|^2 d\omega$$

فرض می کنیم $u(t)$ یک پالس نبشی است.

$$\leq \|G\|_\infty^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(\omega)|^2 d\omega$$

$$\leq \|G\|_\infty^2 \cdot \|u\|_2^2$$

$$\leq \|G\|_\infty^2 \cdot \|u(t)\|_2^2$$

پس کران بالای $\|y\|_2$ به ازای ورودی $u(t)$ برابر با $\|G\|_\infty$ است.

از طرفی کران بالای نرم بنریست خروجی را اصطلاحاً بهره سیستم نرم ده - نرم بنریست گویند

این مقدار برابر با $\|G\|_2$ است :

انتگرال کانولوشن سیستم است.

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) u(\tau) d\tau \right|$$

انتگرال کانولوشن

طبق نامی گوشتی - شوارتز (Cauchy-Schwarz)

$$|y(t)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} G^2(t-\tau) d\tau \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}$$

کدام تغییر متغیر را باید در انتگرال قرار داد؟
 $t-\tau=v$
 $dt=dv, t=v+\tau$

$$|y(t)| \leq \|G(t)\|_2 \|u(t)\|_2$$

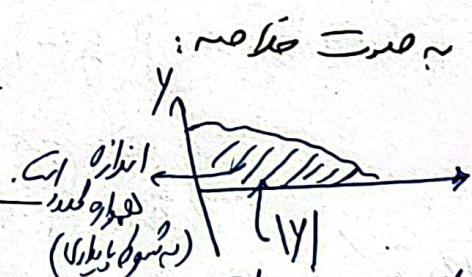
نرم لانه ای

$$\|y\|_{\infty} = |y(t)| \leq \|G(t)\|_2 \|u(t)\|_2$$

پس کران بالای $\|y\|_{\infty}$ به ازای ورودی با کران بالای یک برابر با $\|G\|_2$ است.

★ (بقیه مدار در به صورت مشابه قابل اثبات است)

	$\ u\ _2$	$\ u\ _{\infty}$
$\ y\ _2$	$\ G\ _{\infty}$	∞
$\ y\ _{\infty}$	$\ G\ _2$	$\ G\ _1$



$$G = y \times u$$

مثال: تابع تبدیل $\frac{1}{s+1}$ را در نظر بگیرید. با فرض اینکه از اثری سلفی در سیستم وجود ندارد. مقدار از دست رفته را محاسبه کنید. مثال: تابع تبدیل $\frac{1}{s+1}$ را در نظر بگیرید. با فرض اینکه از اثری سلفی در سیستم وجود ندارد. مقدار از دست رفته را محاسبه کنید.

نیز، نسبت بین $\|y\|_{\infty}$ و $\|y\|_2$ را محاسبه کنید.

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{0.4}{\sqrt{20}} \|y\|_2$$

بایداری سیم های دینامیکی

* مروری بر بایداری سیم های حلقی

یکی از روش های مرسوم در تحلیل سیم های حلقی رسم نمودار و عکس العمل سیم های دایره ای
شرایط اولیه $x = x(t)$ در $t = 0$ است به صورتی که میدان به صورت زیر می باشد

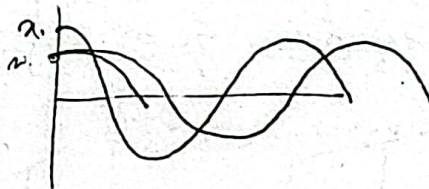
فرکانس (ω_n) یعنی (ω_n) که n مربوط به n مود حالت و ω_n به معنی ω_n است
(به عنوان مثال پاسخ پدیده یا پاسخ پهنه راداری)

تصور کنید اوتار سیم فوق در فضای $(n, 1)$ یعنی x_n و $\dot{x}_n$ یعنی آکس های راجه دور
می آورده به آن می گویند یا صفحه فاز (Phase plane) که می باشد

$$m \ddot{x} + kx = 0$$

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$$



مثال:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \cos(\omega_n t - \phi) \quad \left(\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)\right)$$

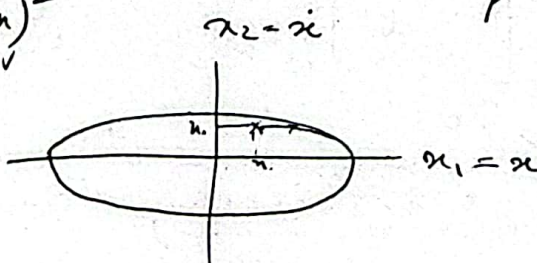
$$\left[\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_n t - \phi) \\ \dot{x}(t) &= -A \omega_n \sin(\omega_n t - \phi) \end{aligned} \right]^2$$

$$= A^2 \cos^2(\omega_n t - \phi)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}\right)$$

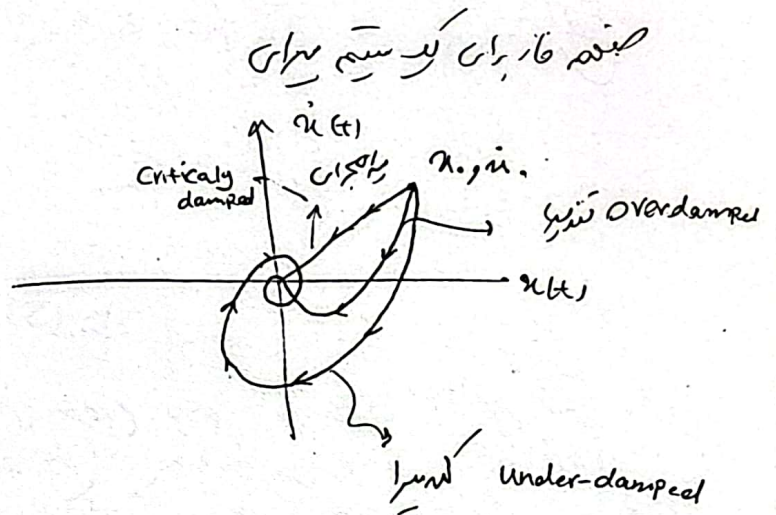
$$\frac{x^2(t)}{A^2} + \frac{\dot{x}^2(t)}{(A \omega_n)^2} = 1$$



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = 0$$

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$$



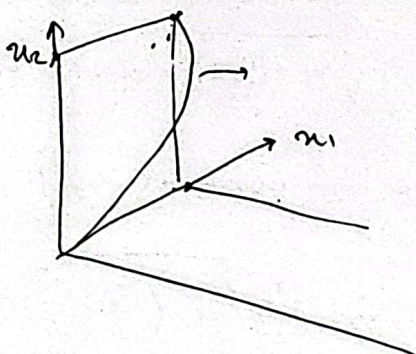
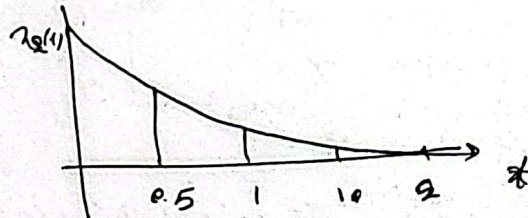
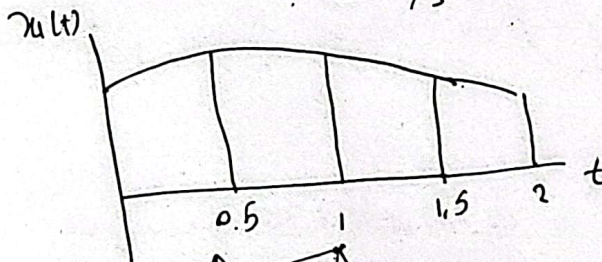
تأثیر تغییر در پارامترهای سیستم بر روی جواب، شرایط اولیه عبارتند از: $\dot{x} = A x$ که A ماتریس است، شرایط اولیه عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \phi x_0 = e^{At} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} 7e^{-t} - 5e^{-2t} \\ 7/3 e^{-t} + 5/3 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

عکس العمل سیستم:



حالت اولیه را در این معادله قرار می‌دهیم:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \dot{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

و نسبت $\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{3e^{-t}}{e^{-t}} = 3$ ثابت

2

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

از این هم معلوم است $\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = -3$

سوال: چرا این در شرایط خاص باعث خواهد شد که مسیر حرکت یک خط راست باشد؟

$$|dI - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, -2$$

$$(d_i I - A) v^i = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

چون همیشه یک بردار مشخص، به سمت یک حرکت می برد در نتیجه هر دو بردار دارد.

نتیجه گیری کلی: هرگاه یک حرکت نسبی آزاد (بدون درجه) که در این بردار ویژه شروع شود همیشه

بر بردار ویژه باقی خواهد ماند تا به سراسر مشخصات برسد. (مقاله اثبات)

$$x = \vec{x}^T = \vec{x}^T [v^1 \ v^2 \ \dots \ v^n] = x_1^T v^1 + x_2^T v^2 + \dots + x_n^T v^n$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) = A x(t) &= x_1^T A v^1 + x_2^T A v^2 + \dots + x_n^T A v^n \\ (A - P_i I) v^i &= 0 \rightarrow A v^i = P_i v^i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} x = P_1 x_1^T v^1 + \dots + P_n x_n^T v^n$$

به عنوان مثال اگر $x = x_1^T v^1$ باشد (یعنی تقریباً حالت نقطه ای از فضای متغیرها) حالت در بردار

ویژه قرار داده باشند. داریم:

$$\frac{d}{dt} x = A x : x_1^T A v^1 = P_1 x_1^T v^1$$

این حالت به آن است که بردار سمت (علاوه بر هر جهت در هر نقطه) در امتداد بردار ویژه قرار دارد.

لذا بردار سمت در امتداد می ماند و در امتداد این بردار ویژه خواهد بود.

برای رسم صحنه فاز کافی است که t را حذف کنیم.

$$x_1(t) = 7e^{-t} - 5e^{-2t}$$

$$x_2(t) = 7/3 e^{-t} + 5/3 e^{-2t}$$

$$e^{-t} = \frac{x_1 + 13x_2}{14}$$

$$e^{-2t} = \frac{-x_1 + 3x_2}{10}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1 + 13x_2}{14} \right)^2 = - \left(\frac{-x_1 + 3x_2}{10} \right)$$

رسم آن ضامن است
نیست!

رودش انیزوکلین (Isocline) برای تقسیمی در صحنه فازی:

رودش انیزوکلین برای رسم سیم‌های رله ۲ معادله استفاده می‌شود:

از این‌جا برای اصل قرار دارد که در صحنه فازی x_1, x_2 نقاط در شیب $\frac{dx_2}{dx_1}$

برای هر یک از این‌ها ثابت است. رانقش‌های نیمه. چنین خطوط راستی منتهی‌های را انیزوکلین

(خط‌های با شیب یکسان) نامند.

$$\dot{x} = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1/6 & -3/2 \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{3}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{6} x_1 - \frac{3}{2} x_2$$

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1/6 x_1 - 3/2 x_2}{3/2 x_1 + 3/2 x_2} = \frac{1/3 - 3r}{-3 + 3r}$$

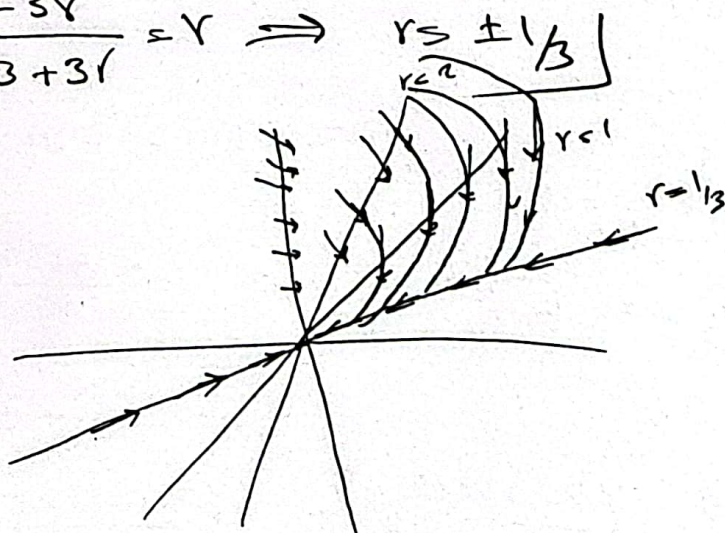
کدام $r = \pm 1/3$

بر روی بردارهای ویژه، خطوط شیب، دامنه‌های انیزوکلین و در افق‌های مجاری وقتی انیزوکلین

بر بردار ویژه منطبق شود، خطوط شیب هم‌اسه‌ها بردار ویژه بوده و از این می‌توان

بردارهای ویژه را شناسایی نمود؛ لذا داریم:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1/3 - 3r}{-3 + 3r} = r \Rightarrow r = \pm 1/3$$



3

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

مسئله ۲: تعیین هر حالت هم‌زمانه و غیره.

$$m \frac{d}{dt} \dot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dn} \cdot \frac{dn}{dt} = m \frac{d\dot{x}}{dn} \cdot \dot{x}$$

$$\Rightarrow \left[m \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dn} + b\dot{x} + kx = 0 \right] \quad \text{تقسیم بر } m\dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dn} = \frac{-(b\dot{x})}{m\dot{x}} - \frac{kx}{m\dot{x}} = -\frac{b}{m} - \omega_n^2 \frac{x}{\dot{x}}$$

$$\begin{cases} n_1 = x \\ n_2 = \frac{x}{\omega_n} \end{cases} \quad \text{طریقی نام } n_1 \text{ (تغییر مکان)؛ } n_2 \text{ (درشتی سرعت)؛ } \omega_n \text{ (فرکانس طبیعی)}$$

$$\Rightarrow \frac{dn_2}{dn_1} = -\frac{b}{m\omega_n} - \frac{n_2}{n_1} = \text{قدرت ارتعاش}$$

$$n_2 \rightarrow \infty \quad \text{مگر } n_1 \rightarrow \infty$$

$$n_1 = n_2 \quad \rightarrow \quad \text{تیب} = \frac{b}{m\omega_n} - 1$$

نکته: درشتی $\frac{dn_2}{dn_1}$ برابر $\frac{n_2}{n_1}$ شود (میدانند که این دو یکسان است)

آنها این دو یکسان هستند؛ بردار فاصله بود

جواب: واضح است که در حالتی که سیستم هم‌زمانه و غیره (underdamped) $\frac{b}{m\omega_n} < 1$

است بردارهای حقیقی ندارد.

در حالتی که $\frac{b}{m\omega_n} > 1$ است سیستم هم‌زمانه و غیره و لذا $\frac{dn_2}{dn_1}$ می‌تواند

$$n_2 = \frac{n_1}{\omega_n}$$

$$\frac{dn_2}{dn_1} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = -\frac{b}{m\omega_n} - \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + \frac{b}{m\omega_n} \left(\frac{n_2}{n_1}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = -\frac{b}{m\omega_n} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m\omega_n}\right)^2 - 1}$$

همان طور که ملاحظه می شود رادیکال سمت راست برای حالت Underdamped موهومی است (یعنی $\frac{b}{m\omega_n} < 1$) و هیچ انرژی مکانی حقیقی نگین خاصیت که آن را میسر از Trajectory با تنه و پیرچرخانه داشت.

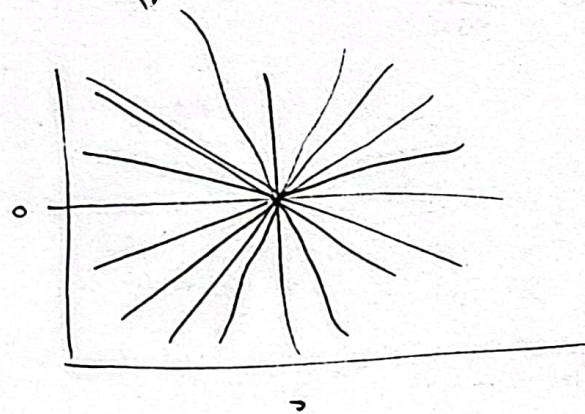
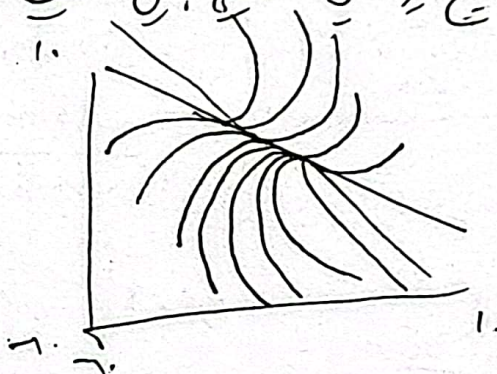
مثال: $\frac{b}{2m\omega_n} = 1.25$

$$\frac{x_2}{x_1} = -1.25 \pm \sqrt{(1.25)^2 - 1} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = -2$$

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{1}{2}$$

حقیقی $\rightarrow$



Van der Pol System

مثال

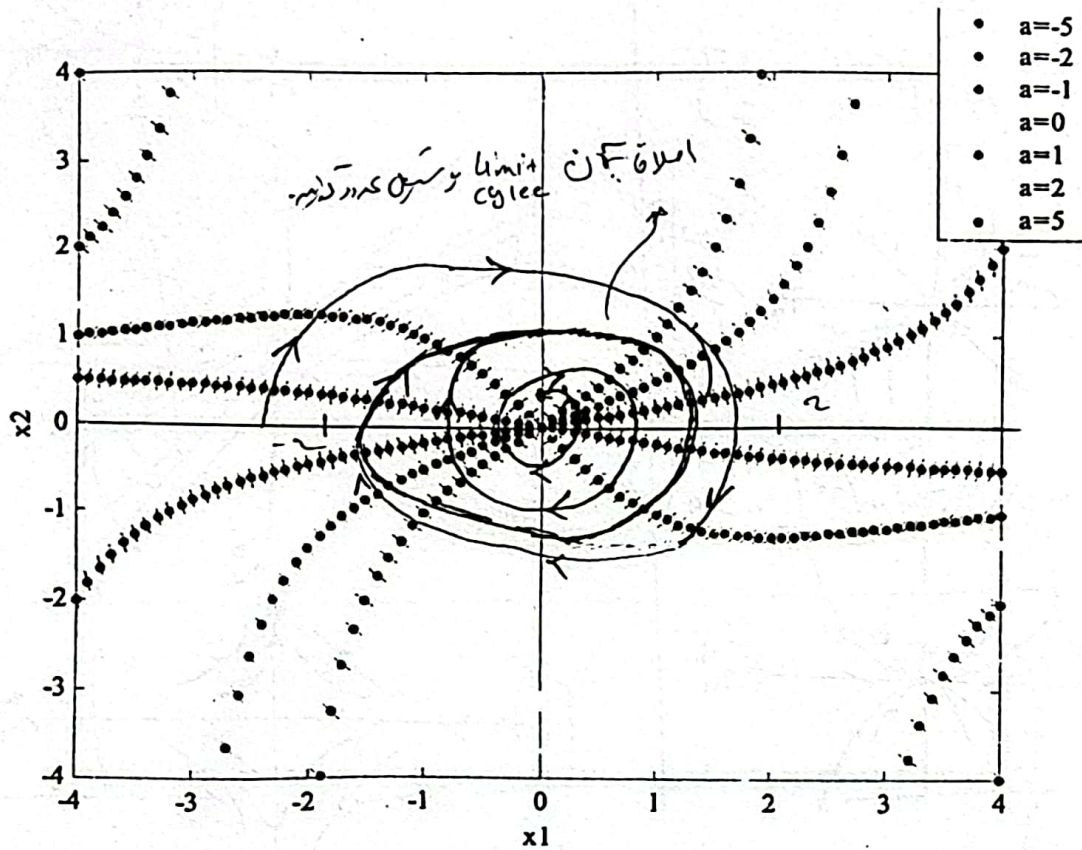
$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} = 0 \quad \mu = 0.2$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{dn}{dx} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + n = 0 \Rightarrow \frac{dn}{dx} = \frac{-0.2(x^2 - 1)\dot{x} + n}{\dot{x}} = \alpha$$

$$0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x + \alpha \dot{x} = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = x \\ \dot{x}_2 = \dot{x} \end{matrix}$$

$$0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1 + \alpha x_2$$

4



تمرین ۱: با استفاده از روش Isocline، نمودار فاز را رسم کنید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

تمرین ۲: با روش انجرفه‌ای، حرکت فاز را رسم کنید: $\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \sin(\theta)$

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \sin(\theta)$$

$$\lambda = 0.1, 0.3, 1$$

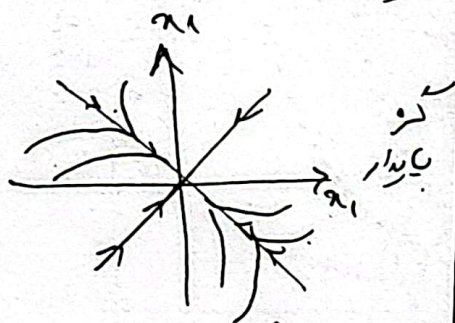
For $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 4$

$t = 0 \sim 25 \text{ sec.}$

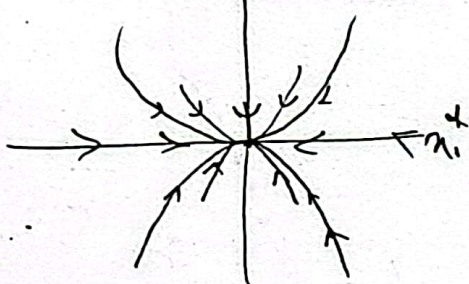
فصل 6 $P_1 = -1$ $P_2 = -4$

فرم دگر

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$



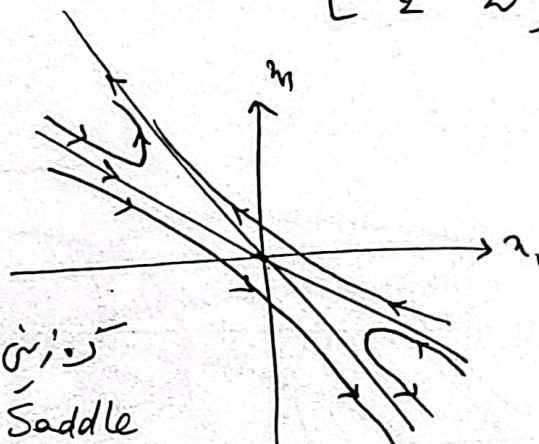
$$A^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$



فرم 6

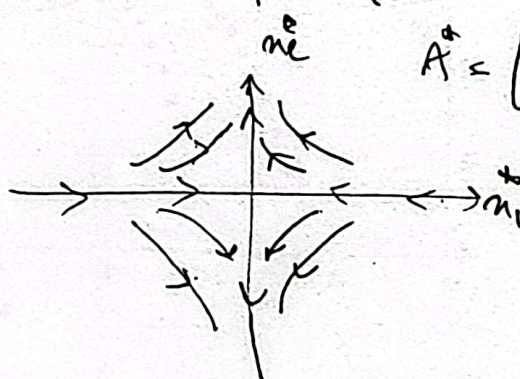
$P_1 = -2$, $P_2 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

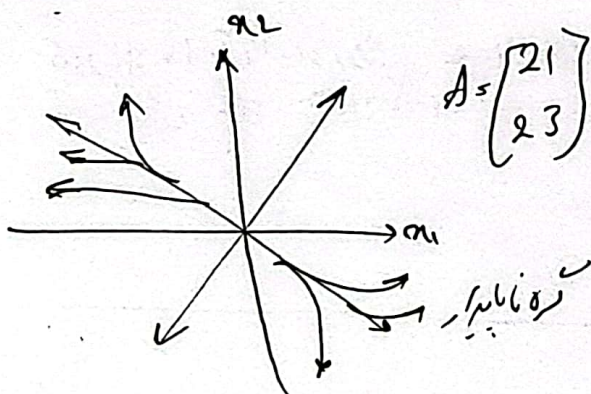


نقطه
Saddle

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

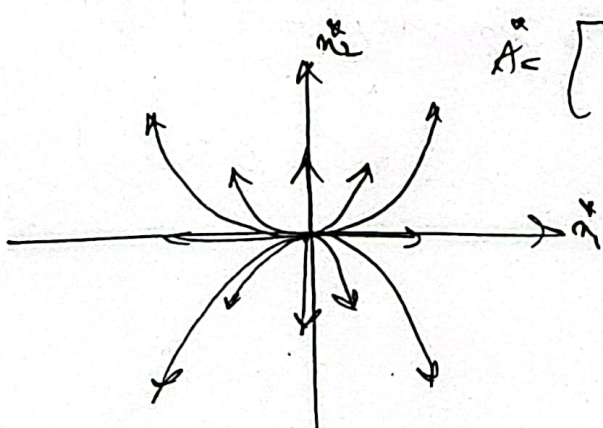


$P_1 = 1$, $P_2 = 4$

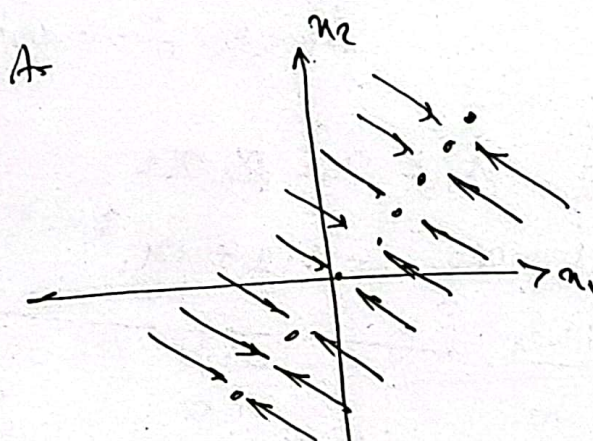


$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

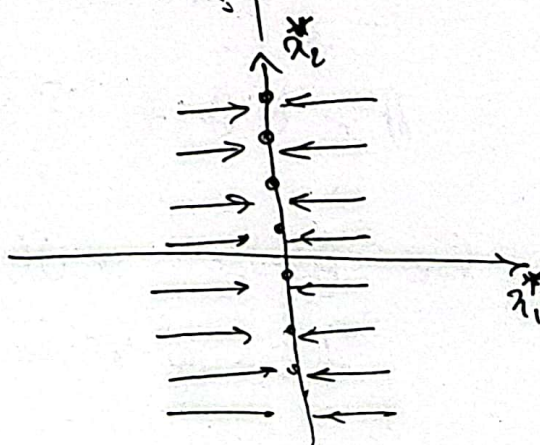
$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$



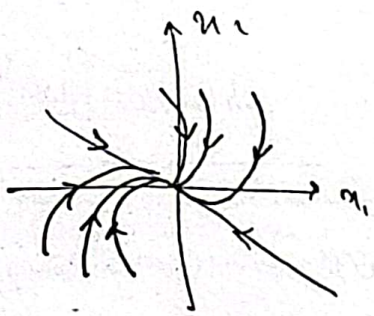
$P_1 = -5$, $P_2 = 0$



A*

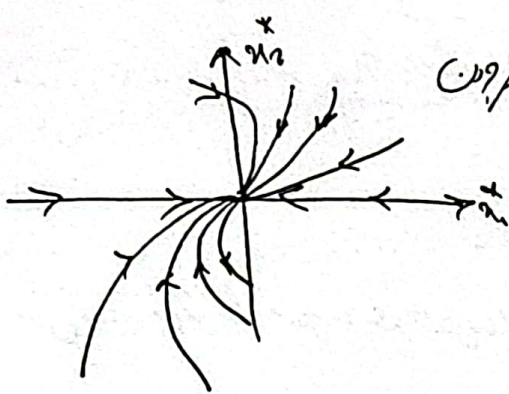


5



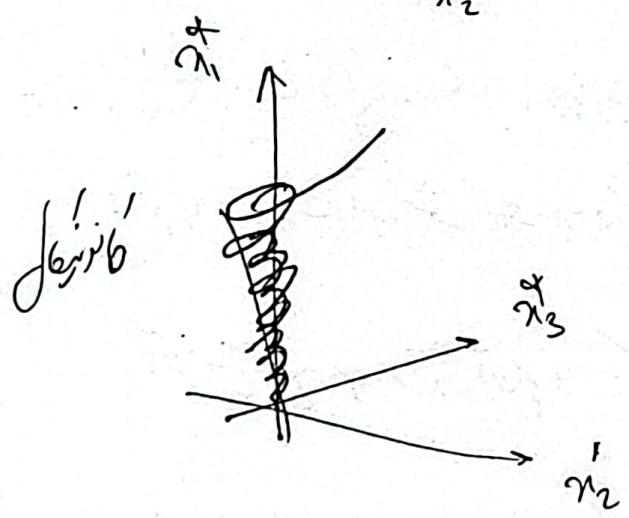
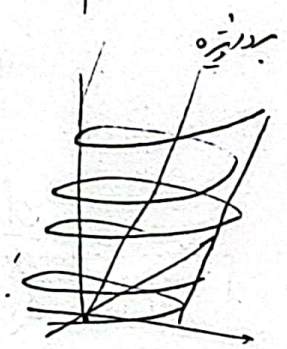
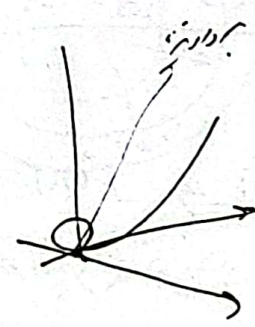
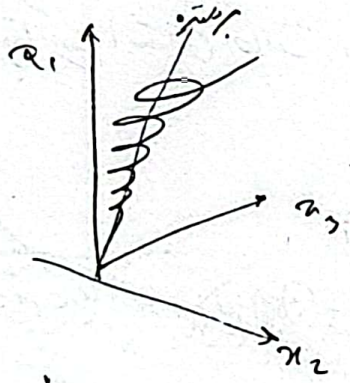
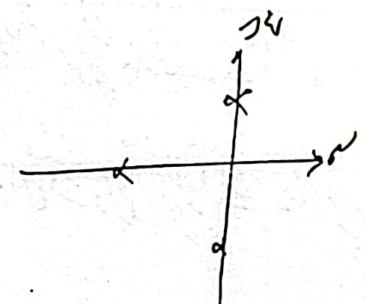
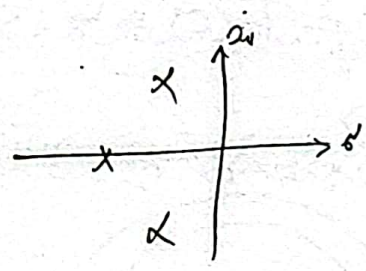
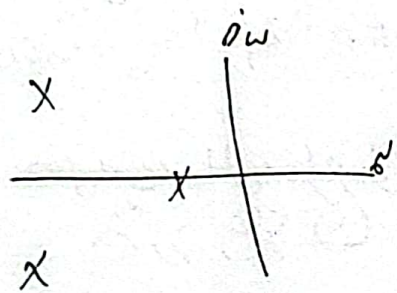
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = P_2 = -2$$



$$C.A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

* به کمک بردارهای ویژه می‌توانیم



جواب

بایداری حول نقطه تعادل

یک سیستم دینامیک با پارامترهای ثابت نسبت به زمان (Free stationary system) را در نظر بگیرید. در صورتیکه در حالت تعادل x_a باشد، بردار x_a نمایش دهنده نقطه تعادل است. در مسائل زیر صحت کنید.

$$\frac{d}{dt} x_a(t) = F(x_a(t))$$

که این سیستم را می‌توان به صورتی غیر خطی نوشت: در صورتیکه این سیستم دارای نقطه تعادل $x_a = c$ باشد.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} x_a(t) = F(c) = 0 \quad \text{نادرست}$$

حال این سوال مطرح خواهد بود آیا سیستم حول نقطه مذکور دارای تعادل پایدار است یا خیر؟

$$\text{انتگرال انتقال حالت به صورت} \quad \underline{x = x_a - c} \quad \text{انحراف از تعادل}$$

$$\frac{d}{dt} x = F(x) \rightarrow F(x) = 0 \quad (*)$$

این سیستم خطی باشد معادله $(*)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} x = A x \quad (**)$$

اگر نمایشی که در مسائل نمایشی یک پدیده فیزیکی هستند فرض می‌شود که حل $(*)$ متناهی به‌طور بی‌پایان است.

اگر سیستم غیر خطی باشد واضح است که فرض‌های $(*)$ و $(**)$ (در بیان مسئله) جواب $(*)$

به نامیه می‌دهد در اطراف نقطه تعادل صفر مربوط می‌باشد.

6

$$\|x\| < R$$

این ناحیه به صورت زیر قابل نمایش است که:

که R یک مقدار، محدود، حقیقی و مثبت است.

① ② ③

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$$

norm of x

R بیانگر محدودی و ناحیه‌ای از اطراف نقطه تعادل است که «بُخِ پایدار» سیستم حول نقطه تعادل «شروع» می‌شود.

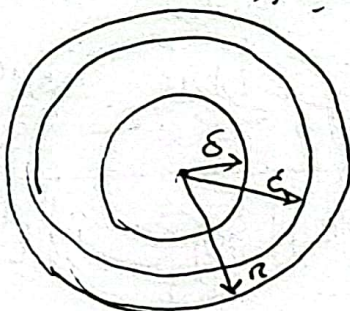
محدوده صحت است.

R : a hypersphere with center of o
radius

* پایدار با تعریف *

ابتدا دونا ناحیه فضایی به صورت دایره فضایی به شعاع δ و ϵ را مطابق شکل در داخل یک فضای به شعاع R در نظر می‌گیریم (منطبق بر زیر بخش است) به صورتی که:

$$\delta < \epsilon < R$$



آزبان هر شعاع ϵ شعاعی مانند δ وجود داشته باشد معلوم می‌شود هرگاه می‌دانست
سیستم از نقطه تعادل x_0 داخل (یا روی) کره فضایی به شعاع δ شروع شده،
مید حرکت همواره داخل (یا روی) کره فضایی به شعاع ϵ باقی بماند، سیستم پایدار
(Stable) است

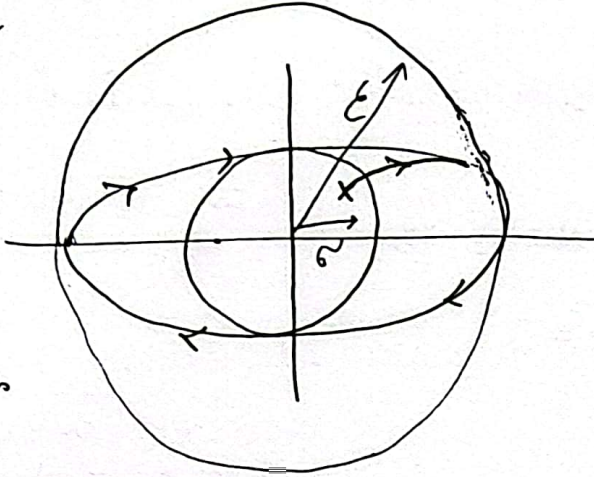
مکان سیم جسم در $x = A \sin(\omega t + \phi)$ و سرعت آن $v = A \omega \cos(\omega t + \phi)$ قرار می‌گیرد. با این حال، رابطه‌ی

$$x = A \sin(\omega t + \phi) = x_1$$

لایه‌ی کثیف بر روی سیم

$$\dot{x} = A \omega \cos(\omega t + \phi) = x_2$$

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{A^2 \omega^2} = 1$$



طول دایره اتنی باشد که

قطر نزدیک به صفر باشد $\omega \ll 1$

دایره کوچک آن مساحت ω^2 شود

* واضح است که اگر میر و دمت از داخل دایره به شعاع ω شروع شود، داخل به بیرون

رو به رفته، دایره داخل دایره‌ی به شعاع ω باقی بماند. خواهی مانده

لذا حالتی تعریف می‌شود پایدار است.

A asymptotically Stable حالت تعادل صفر کاملاً پایدار است اگر:

اولاً پایدار باشد.

ثانیاً هر میر و دمت که از داخل کره فضای شعاع ω شروع شود نهایتاً $(\omega \rightarrow 0)$ به صفر

مختصات فضای (x, v) نزدیک به صفر می‌ماند. $x(t) = 0$ $t \rightarrow \infty$

حالت تعادل صفر ناپایدار (unstable) است اگر این فضا به شعاع ω

در این فضا دایره کوچک به شعاع ω تعادل تعادل شود. نقطه شروعی داشته ω در داخل دایره

به شعاع ω وجود داشته باشد، به صورتی که میر و دمت (که از ω شروع شد) در فضا

به شعاع ω واقع در زمان t بماند

آیا به ازای هر ورودی با دامنه محدود، عکس العمل (خروجی) سیستم در پاس دامنه محدود است یا نه؟

یک سیستم با شوط اولیه صغیراً پایدار نامیده می‌شود اگر: به ازای هر ورودی با دامنه محدود (Bounded Input)

دامنه عکس العمل (خروجی) سیستم نیز محدود (Bounded output) باشد، در این صورت چنین سیستمی را پایدار BIBO نامیده و واضح است که اگر به ازای ورودی با دامنه محدود، دامنه عکس العمل یا خروجی محدود

نباشد، این سیستم «پایدار BIBO» نگردد.

در حالت کلی فرض $u(t)$ و $y(t)$ به صورت نرم کشیدنی محدود باشند.

* یک کشیدنی $u(t)$ اگر محدود است اگر

$$\exists M_u < \infty : \|u(t)\| = \sup_{t \geq 0} |u(t)| < M_u$$

تعریف: تابع اسکالر $h(t)$ که مدّ اشغال پذیر است اگر $M_h < \infty$ $\exists$ به صورتی که

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau < M_h$$

باشد.

* تئوری BIBO: یک سیستم خطی SISO با پاسخ ضربه $h(t)$ به هر

BIBO پایدار است اگر و تنها اگر $h(t)$ که مدّ اشغال پذیر باشد.

اشاره هولوگرافیک

اثبات: برای یک سیگنال حقیقی داریم: $y(t) = \int_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) d\tau$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |y(t)| &= \left| \int_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^\infty |h(\tau) u(t-\tau)| d\tau \\ &\leq \int_0^\infty |h(\tau)| \cdot |u(t-\tau)| d\tau \end{aligned}$$

در این صورت اگر $u(t)$ محدود بوده، $h(t)$ نیز کاملاً اشاره پذیر باشد،

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty |h(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau$$

$$\leq M_u \int_0^\infty |h(\tau)| d\tau$$

$$\leq M_u \cdot M_h$$

که در این صورت

$|y(t)|$ محدود خواهد بود.

آر $h(t)$ کاملاً اشاره پذیر نباشد به ازای $\bar{t}$ وجود خواهد داشت که در آن

$$\int_0^{\bar{t}} |h(\tau)| d\tau = \infty$$

بنابراین برای یک سیگنال مشخصی مانند

$$u(\bar{t}-\tau) = \begin{cases} +1 & h(t) > 0 \\ -1 & h(t) < 0 \end{cases}$$

فواصل داشت:

$$y(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} h(\tau) u(\bar{t}-\tau) d\tau = \int_0^{\bar{t}} |h(\tau)| d\tau = \infty$$

و $y(t)$ محدود نخواهد بود.

8

* نفوس BIBO 2 : سیستم خطی MIMO با ترسین پاسخ ضربه $H(s) = (H_{ij}(s))$

به صورت BIBO باید خواصی بود آر دتنگ آر $h_{ij}(t)$ به ازای تمامی آرزوها کاملاً اشتغال پذیر باشد.

باشد.

نتیجه: یک سیستم خطی MIMO با تابع تبدیل (ترسین) کوکله $H(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$ به صورت BIBO باید

است آر دتنگ آر قطبهای $H(s)$ در نیمه صاف ضمیمه مختلط (LHP) قرار داشته باشند.

اثبات: پاسخ ضربه $h_{ij}(t)$ از تابع تبدیل $H_{ij}(s)$ به صورت برعکس استخراج است:

$$h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1} [H_{ij}(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_{ij}(s)}{d(s)} \right]$$

$H(s)$ کوکله
Rational & Proper

$$h_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_i}{(s - \lambda_i)^j} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \underbrace{t^{j-1}}_{\text{کوکله}} e^{\lambda_i t}$$

ماتریس نوشت

که دتنگ λ_i ها همیشه در (s) با کمره k_i مرتبه داشته باشند. بنابراین $h_{ij}(t)$ کاملاً اشتغال پذیر است آر دتنگ آر فاکتور:

$$t^{j-1} e^{\lambda_i t}, \quad j=1, \dots, k_i$$

کاملاً اشتغال پذیر باشد.

آر دتنگ است که:

$$\forall \lambda_i \in \mathbb{R} \quad R(\lambda_i) < 0$$

آر دتنگ آر دتنگ حقیقی

ریشه λ_i در LHP واقع شده باشد.

$$G(s) = \frac{a(s)}{b(s)} \quad \text{تابع تبدیل}$$

مقدارهای قطبی

با در نظر گرفتن ورودی به شکل $u(t) = a \sin(\omega t)$ با ω ، عکس العمل سیستم $y(t)$ در حالت ماندگار، در ω را تعیین می‌کنیم:

$$u(t) = a \sin(\omega t) \xrightarrow{P} U(s) = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$u(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y(s) \quad y(s) = G(s) U(s) = \frac{a\omega B(s)}{(s^2 + \omega^2) A(s)}$$

دانش رابطه $A(s)$ یک چند جمله‌ای درجه n است. (سیستم مدار بلند از ریشه‌ها)

آرایش‌های $A(s)$ یعنی قطب‌های سیستم مدار را از p_i نشان می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$Y(s) = \frac{K_0}{s - j\omega} + \frac{K_0^*}{s + j\omega} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

دانش رابطه K_0 ، K_0^* اعداد مختلط مترسره هستند. برای K_0 و K_0^* کافی است طرفین مدار را

را به ترتیب در $s = j\omega$ ، $s = -j\omega$ ضرب و مرتب می‌کنیم. مدار را از $s = j\omega$ و $s = -j\omega$ می‌گیریم

می‌آید:

$$K_0 = \left[\frac{a\omega G(s)}{s + j\omega} \right]_{s=j\omega} = \frac{a\omega G(j\omega)}{2j\omega} = \frac{a G(j\omega)}{2j}$$

$$K_0^* = \left[\frac{a\omega G(s)}{s - j\omega} \right]_{s=-j\omega} = -\frac{a G(-j\omega)}{2j}$$

$$y(t) = K_0 e^{j\omega t} + K_0^* e^{-j\omega t} + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}$$

$$t \rightarrow \infty \quad y_{ss}(t) = K_0 e^{j\omega t} + K_0^* e^{-j\omega t}$$

9

$$y_{ss} = a \frac{G(j\omega) e^{j\omega t}}{2j} - \frac{G(-j\omega) e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$G(j\omega) = m(\omega) \angle \phi(\omega) = m(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

$$G(-j\omega) = m(\omega) \angle -\phi(\omega) = m(\omega) e^{-j\phi(\omega)}$$

$$m(\omega) = |G(j\omega)| \quad \phi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

$$y_{ss} = a m(\omega) \frac{e^{j[\omega t + \phi(\omega)]} - e^{-j[\omega t + \phi(\omega)]}}{2j}$$

$$\Rightarrow y_{ss} = \underbrace{a m(\omega)}_{\text{تغییر دامنه}} \underbrace{\sin(\omega t + \phi(\omega))}_{\text{تغییر فاز}}$$

نموده قطبی (پایکوت) عبارت است از رسم بردار مختلط $G(j\omega)$ در صفحه مختلط (که آن را صفحه $G(j\omega)$ می‌نامیم) وقتی ω از صفر تا ∞ تغییر کند. در این نمودار مقادیر بزرگنمایی $m(\omega)$ و فاز $\phi(\omega)$ توپا در یک نخطی رسم می‌شوند که در آن نخطی ω عبارت از پدیده غیر آشکارس است که نتیجه بر حسب آن درجه بندی شود.

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

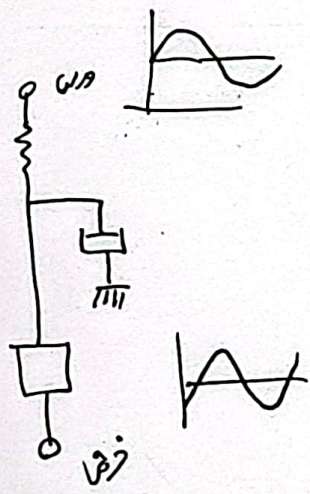
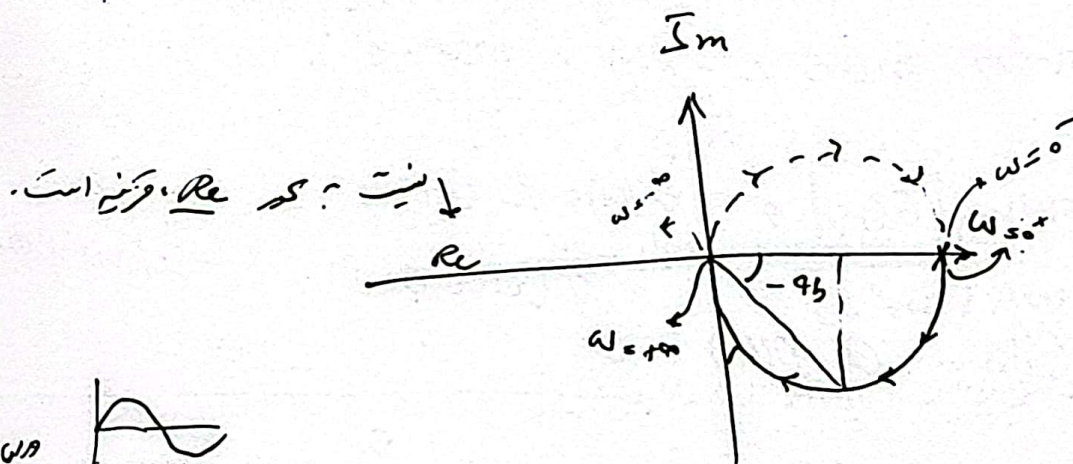
مثال ۱

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega T)$$

$$\omega = 0 \longrightarrow m(\omega) = |G(j\omega)| = 1 \quad \phi(\omega) = 0$$

$$\omega = \frac{1}{T} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \longrightarrow G(j\omega) = 0 \angle -90$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{k}{ms^2 + bs + \frac{k}{m}} = \frac{1}{1 + \frac{b}{k}s + \frac{m}{k}s^2}$$

$$k/m = \omega_n^2 \quad b/m = 2\xi\omega_n$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

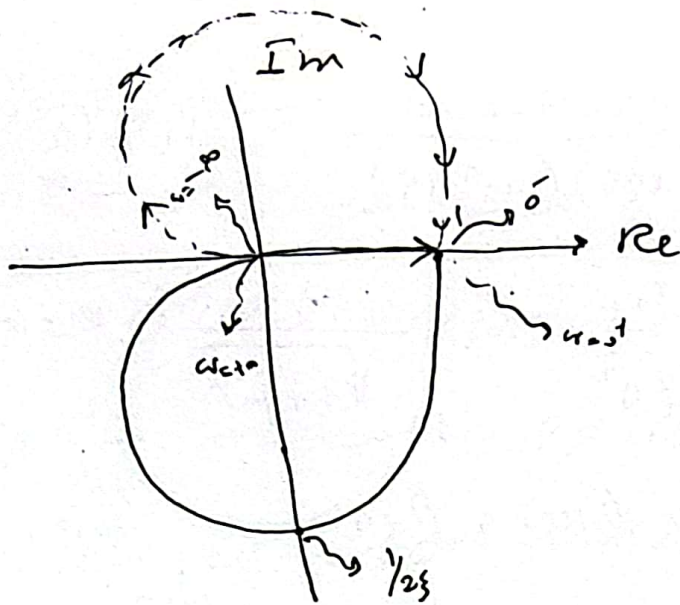
$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}\right)$$

$$= \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2} - j \frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$$

$$\omega = 0 \longrightarrow G(j\omega) = 1 \angle 0 = 1 - 0j$$

$$\omega = \omega_n \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{2\xi} \angle -90 = 0 - j \frac{1}{2\xi}$$

$$\omega = \infty \longrightarrow G(j\omega) = 0 \angle -180 = -0 - j0$$



$$G(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$$

: $\sqrt{s}$

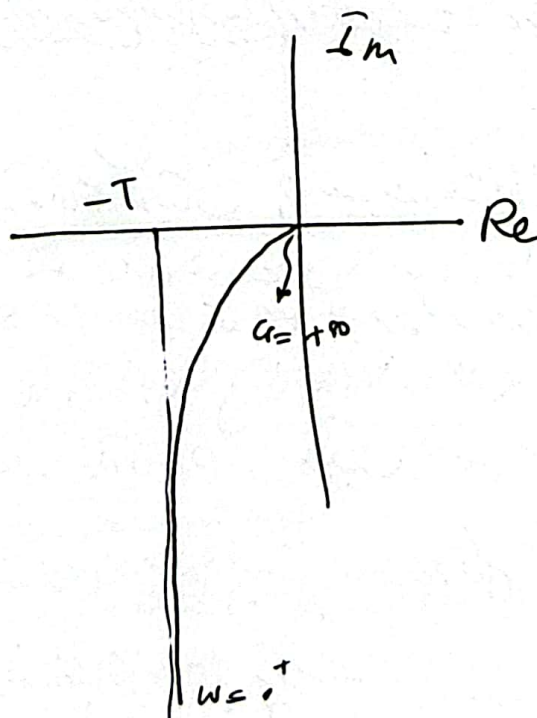
$$\Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 T^2)^2 + \omega^2}} \quad \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-\omega^2 T}\right)$$

$$\angle -\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\omega T}\right)$$

$$G(j\omega) = -\frac{T}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1+\omega^2 T^2)}$$

$$\omega \rightarrow 0 \longrightarrow G(j\omega) = -T - j\infty = \infty \angle -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \longrightarrow G(j\omega) = -0 - j0 = 0 \angle -180^\circ$$



$$G(s) = \frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$$

$$T_1 < T_2 < T_3$$

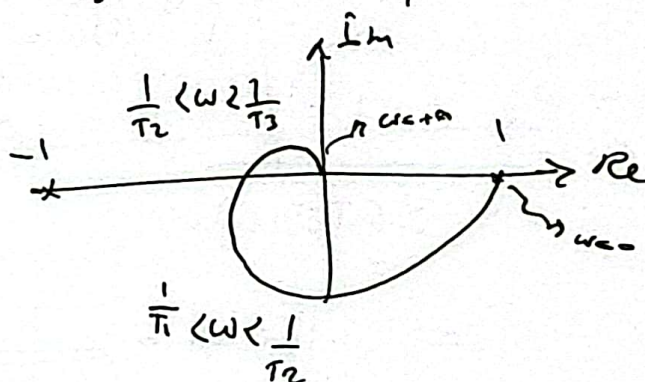
$$m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T_1^2 \omega^2}}$$

$$m_2 = \frac{1}{\sqrt{1+T_2^2 \omega^2}}$$

$$m_3 = \frac{1}{\sqrt{1+T_3^2 \omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega)$$

$$\phi_3(\omega) = -\tan^{-1}(\omega T_3)$$



* قضیه پایداری نایکویست

قضیه پایداری نایکویست: سیستم های مدار بسته کنونی است که در آن اوردیلام

نایکویست = سیستم مدار باز برای تکمیل به پایداری سیستم استفاده می شود. این قضیه همچنین رکن اصلی طراحی

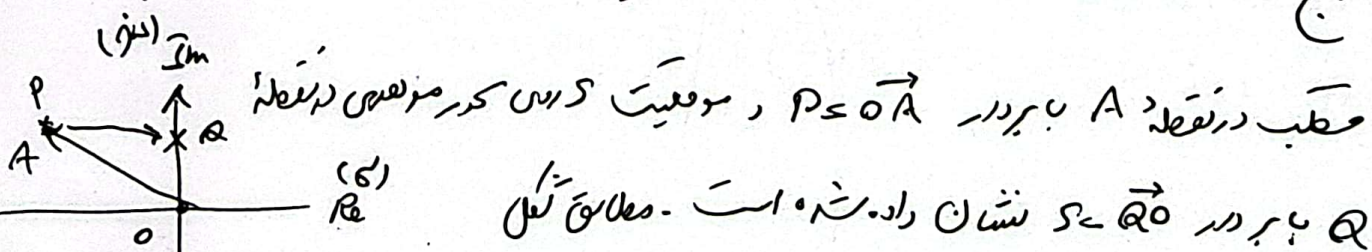
سیستم های مدار بسته با استفاده از روش عکس العمل فرکانس می باشد. از آنجایی که قضیه پایداری نایکویست

به انداز تغییرات زاویه پایداری تبدیل به انداز تغییرات مشتقی لاگاریتمی پایداری می شود. ذکر نکته لازم است

نکته اول:

برای تابع تبدیل $F(s) = \frac{1}{s-p_i}$ که در آن p_i یک عدد مختلط است، خواص مقدار تغییرات زاویه پایداری

تابع $F(s)$ را زمانی که s از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند در محور مدولس پایداری بررسی می شود.



$$AQ = s - p_i \quad P_i + AQ = s \quad \text{برای این رابطه بر روی}$$

اگر تغییر فاز مثبت مطابق با جهت مثبت شکلی نسبت به محور حقیقی (Re) سنجیده شود، هنگامی که S از $-\infty$ به $+\infty$ تغییر کند، AQ از $-\pi/2$ به $+\pi/2$ تغییر فاز خواهد داد. بنابراین فاز AQ به اندازه $+\pi$ تغییر می‌کند. از آنجایی که AQ درخرج (K است)، درنقطه $\frac{1}{AQ} = \frac{1}{K}$ به اندازه $-\pi$ تغییر فاز خواهد داد. این نتیجه زمانی حاصل می‌شود که نقطه A در (LHP) در نظر گرفته شود. واضح است که اگر A در RHP قرار گیرد AQ به اندازه $-\pi$ در K به اندازه $+\pi$ تغییر فاز خواهد داد.

$$\begin{aligned}
 & \text{LHP} \xrightarrow{\text{اشتباه غیج}} S = j\omega: -\infty \rightarrow +\infty \\
 & \quad \angle AQ(-\pi/2 \rightarrow \pi/2) \Rightarrow \angle F(\omega) = -\pi \quad \text{تغییر فاز} \\
 & \text{RHP} \xrightarrow{\text{اشتباه غیج}} S = j\omega: -\infty \rightarrow +\infty \\
 & \quad \angle AQ(\pi/2 \rightarrow -\pi/2) \Rightarrow \angle F(\omega) = +\pi \quad \text{تغییر فاز}
 \end{aligned}$$

حال تابع $F = S - Z_1$ را در نظر بگیریم. اگر موقعیت Z_1 را در صفحه S با نقطه B نمایش دهیم از رابطه بودایی شکل مذکور، $Z_1 + BQ = S$ یا $BQ = S - Z_1$ خواهد شد. در این صورت اگر Q از $-\infty$ به $+\infty$ تغییر می‌دهیم، BQ در BQ دور می‌ماند (K است) به اندازه $+\pi$ تغییر فاز خواهد داد. این نتیجه زمانی که Z_1 در LHP قرار گرفته باشد، حاصل خواهد شد. بنابراین حاشی که 2 در RHP واقع شده باشد تغییر فاز F به اندازه $-\pi$ خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 & \text{LHP} \xrightarrow{\text{اشتباه صورت}} S = j\omega: -\infty \rightarrow +\infty \Rightarrow \\
 & \quad \angle BQ(-\pi/2 \rightarrow +\pi/2) \Rightarrow \angle F(\omega) = +\pi \quad \text{تغییر فاز} \\
 & \text{RHP} \xrightarrow{\text{اشتباه صورت}} S = j\omega: -\infty \rightarrow +\infty \Rightarrow \\
 & \quad \angle BQ(+\pi/2 \rightarrow -\pi/2) \Rightarrow \angle F(\omega) = -\pi \quad \text{تغییر فاز}
 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{s - z_1}{s - p_1}$$

آر تیج $F(s)$ تہی بہ صورت

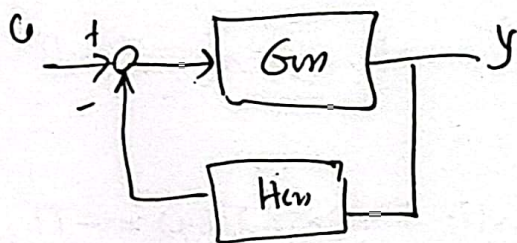
بیشہ دانی صورت:

← آر z_1 و p_1 ہر دو در LHP ہاتھ، تقریباً $F(s)$ مساوی ہاں ہے۔

← آر z_1 و p_1 ہر دو در RHP ہاتھ، تقریباً $F(s)$ مساوی صفر ہے۔

← آر z_1 در RHP و p_1 در LHP ہاتھ تقریباً $F(s)$ مساوی -2π ہے۔

← آر z_1 در LHP و p_1 در RHP ہاتھ تقریباً $F(s)$ مساوی $+2\pi$ ہے۔



نقشہ رسم: کوہستہ کنٹرول بہ صورت زیر ہاں ہے۔

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

دانی صورت بہ توفیق $F(s)$ دیگر سیم مدار سیم بہ صورت زیر ہاں ہے:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

مساوی متکفہ سیم

تاج تبدیل حلقہ ہاں

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{j=1}^n (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

صفر ہاں تاج تبدیل حلقہ ہاں

قطب ہاں تاج تبدیل حلقہ ہاں

$$F(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i^*)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

قطب ہاں تاج تبدیل حلقہ ہاں

قطب ہاں تاج تبدیل حلقہ ہاں

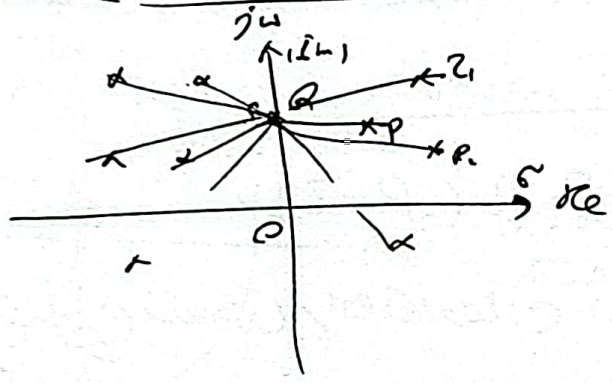
* واضح ہے کہ رشتہ صورت و خارج کنٹرول $F(s)$ مساوی n ہے۔

۶۲

زنجیره عبارت از n رشته معادله ششگانه سیستم مدار مسیبه (مقطب های مدار مسیبه) و p_i عبارت از n رشته معادله مسیبه مدار حلقه باز (مقطب های حلقه باز) است.

باید به این نکته توجه داشت که شرط پایدار بودن سیستم حلقه مسیبه آن است که کسری های Z^* و LHP و K برابر نباشند.

شرط پایداری که می توان بر آن پایدار بودن سیستم های مدار مسیبه ششگانه نوشت، چیست؟



فرض کنید که تابع $F(s)$ به صورت
شکل نشان داده شده دالان :

تعداد Z صفر در RHP : n
تعداد P قطب در RHP : p

دانش صریح تعداد صفر و قطب های پایدار آن عبارتند از :

$n - z$ صفر در LHP
 $n - p$ قطب در LHP

حال اگر Q روی محور موهومی از $\infty - \infty + \infty$ تغییر کند، بخواهیم تغییر فاز « $F(s)$ را بدست
آوریم کافی است تغییر فاز صریح، خروجی و قطب ها، صفر های معلوم در RHP و LHP را بدست
جمع کنیم.

$$\text{تغیر فاز به ازای وجود } (n-2) \text{ صفر در LHP} = + (n-2) \pi$$

$$\text{تغیر فاز به ازای وجود } P \text{ قطب در RHP} = + P \pi$$

$$\text{تغیر فاز به ازای وجود } Z \text{ صفر در RHP} = - Z \pi$$

$$\text{تغیر فاز به ازای وجود } (n-P) \text{ قطب در LHP} = - (n-P) \pi$$

$$\text{تغیر فاز } K_n = 2 \pi (P - Z)$$

به تصحیح طرفین معادله فوق بر 2π تعداد دایان K_n نسبت به صفر 0 حاصل می شود.

$$\text{تعداد دایان } K_n \text{ در جهت مثبت ششگانه} = \overset{+}{N} = P - Z$$

K_n نسبت به 0

- P : تعداد قطب های ناپدید در تابع تبدیل حلقه باز است.
- Z : تعداد قطب های ناپدید در تابع تبدیل حلقه بسته است.

بنابراین شرط پایداری آن است که $Z=0$ باشد. بنابراین $N=P$ می باشد.

همچنین اگر کو سیتم دارای P قطب ناپدید باشد (P ریشه در RHP)، شرط پایداری همان

سیتم مدار بسته ($Z=0$) آن است که $N=P$ باشد یعنی نمودار مقصود (نکته سیست) باید در جهت مثبت ششگانه

N بار حول نقطه مغزی بگردد.

13

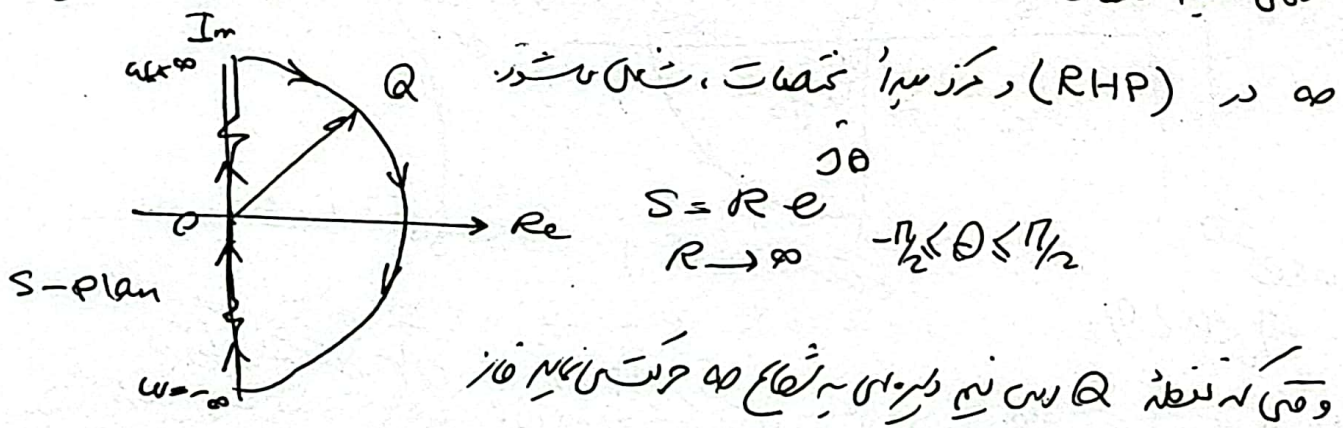
سیستمی که به صورتی در صفحه مختلط s را با یک منحنی بسته در صفحه مختلط

$H(s)$ تصویر کنیم. کوکشت کوکشت به یک بین منحنی بسته (Closed contour)

در صفحه s (s-plane) به منحنی بسته در صفحه s وجود دارد. باقی

منحنی بسته در صفحه s ، در شکل منحنی $H(s)$ در صفحه s ترسیم می‌شود. حاصل شود

منحنی بسته نشان داده شده در صفحه مختلط s ، محور موهومی را به صورت نیم دایره در شعاع



وقتی که نقطه Q در نیم دایره به شعاع R میل می‌کند

$H(s)$ تصویر می‌کند زیرا این منحنی تمام قطب‌ها و صفرهای $H(s)$ در سمت چپ این

نیم دایره به شعاع R قرار گرفته، از طرفی چون راسته صاف و خمی $H(s)$ نیز برابر است،

پس $H(s)$ را می‌توان مشاهده داشت.

* نکته مهم دیگر آنکه اگر یکی از قطب‌های $H(s)$ در محور موهومی قرار گیرد، این سوال مطرح می‌شود که

با قطب که نه در RHP و نه در LHP قرار دارد چه باید کرد؟

دانش حالت به تعارض است که منحنی بسته صفحه مختلط s کوکشت می‌شود. برای

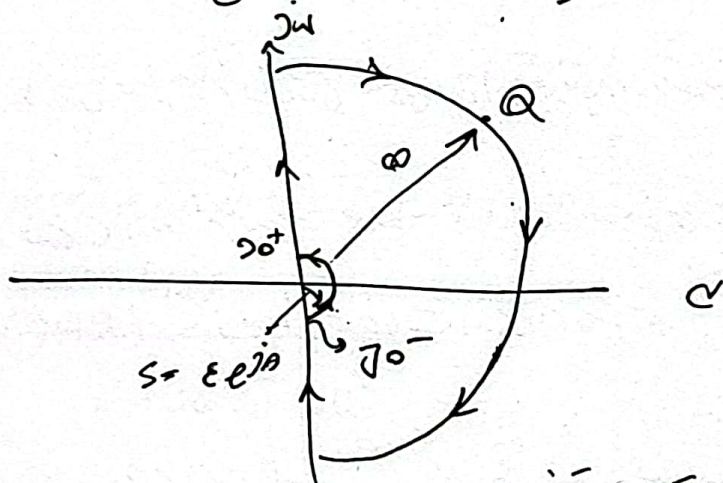
حکومتری این ناپوشش. سه منحنی در اطراف آن نقطه به جای آنکه به صورت خط راست باشد

در آن انتخاب خواهد نمودن نقطه منتهی در داخل یا خارج منحنی قرار گیرد

در شکل کنونی نسبت به صفحه S را برای زمانی که K دایره یک قطب در مبدأ است ($S=0$)

نشان می دهیم. با توجه به شکل چون قطب مذکور در این حالت در LHP قرار گرفته تغییر

در مقدار P ها داده نمی شود. (P تعداد قطب های واقع در RHP)



$$F(s) = \frac{1}{s}$$

نقطه مشخصاً $s = j0^+$ و $s = j0^-$ در صورتی که $s = \epsilon e^{j\theta}$

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2$$

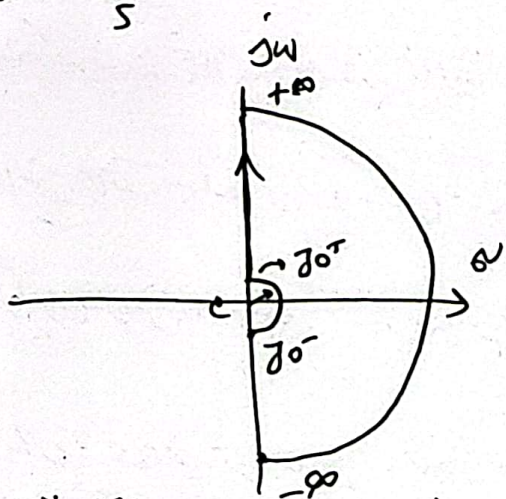
به نظر می آید که این $F(s)$ برتریب $j0^-$ و $j0^+$ است:

$$F(s) = \frac{1}{s} \rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{1}{\epsilon} e^{-j\theta} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

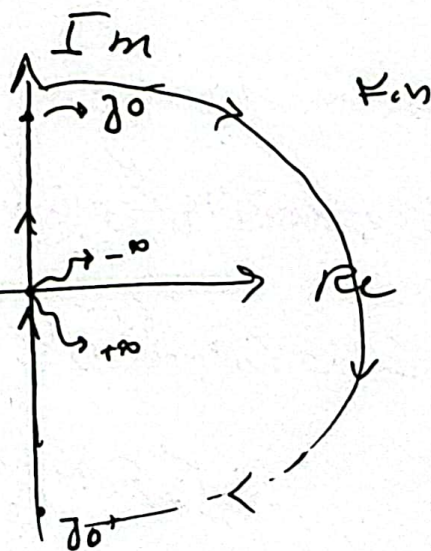
میدانیم که این در صفحه S به شعاع بی نهایت کوچک به نیم دایره ای به شعاع بی نهایت

در صفحه $F(s)$ نگاشته می شود.

$$F(s) = \frac{1}{s}$$



نگاشت

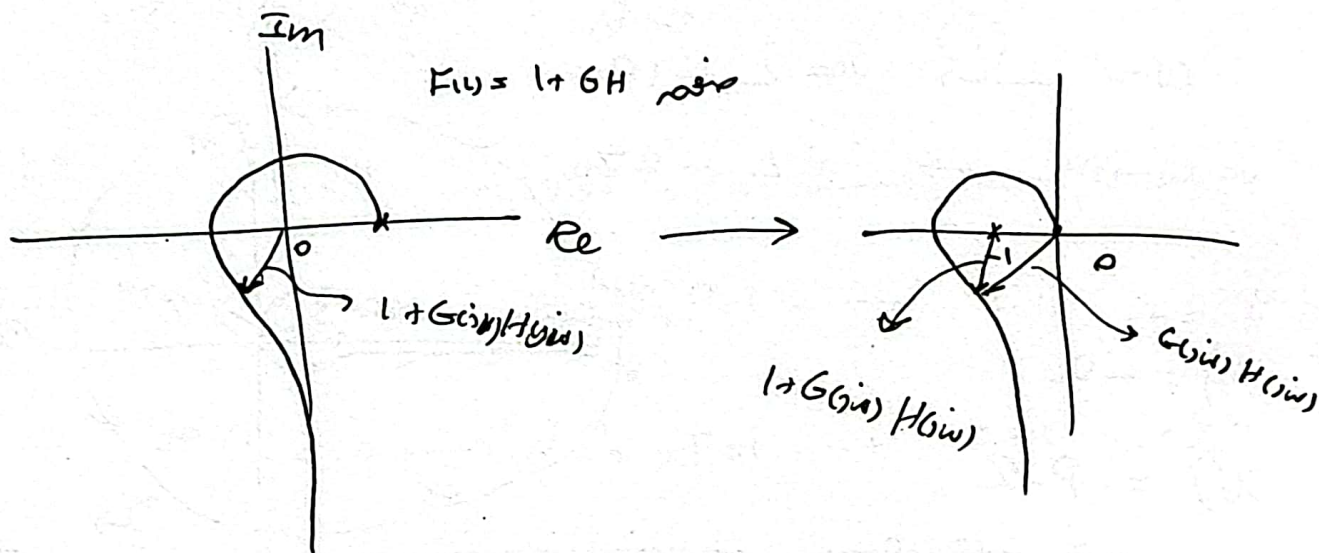


نکته: اگر این نیمی نیم دایره ای به شعاع بی نهایت کوچک در صفحه $F(s)$ نگاشته می شود.

باتوجه به اینکه $F(s)$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

است می‌توان آن را به صورت یک نقطه جایی در نظر گرفت



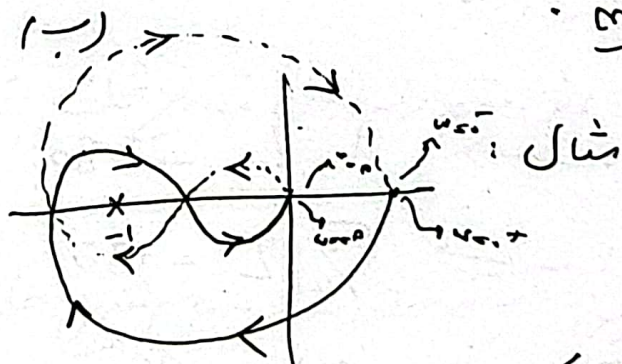
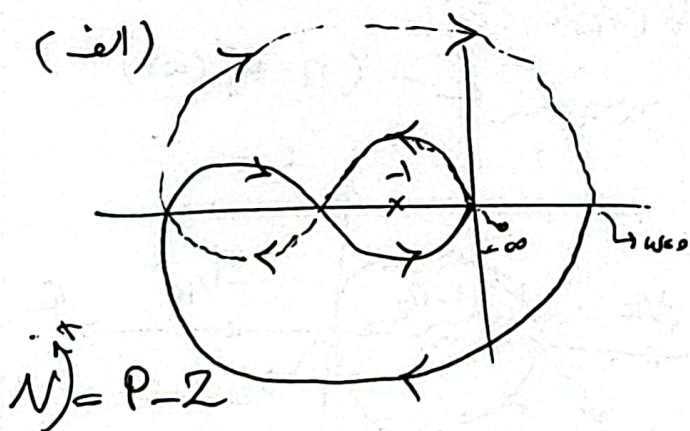
$$Z = Z' + 1 \quad \text{و} \quad \rightarrow \quad Z = Z' - 1$$

در این صورت می‌توانیم رسم $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ که تابع منفرجه است حلقه بسته

است، تابع $H(s)$ را رسم نمودیم و به جای آنکه تعداد در $G(s)H(s)$ را محاسبه

نقطه صفر را در نظر بگیریم، تعداد در $G(s)H(s)$ را محاسبه نقطه ۱ - مشخص

نمی‌باشد



فرض کنید که سیستم حلقه باز را در $P=2$ باشد

(الف) $N=0$ $P=2$ $\Rightarrow Z=2 \Rightarrow$ حلقه بسته پایدار است.

(ب) $N=2$ $P=2$ $\Rightarrow Z=0 \Rightarrow$ حلقه بسته ناپایدار است.

$$G_m H(s) = \frac{1}{s^2 (s+1)}$$

مثال :

$$m(\omega) = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\phi(\omega) = -90 - 90 - \tan^{-1}(\omega)$$

$$\omega \rightarrow 0^+ \rightarrow +\infty \angle -180$$

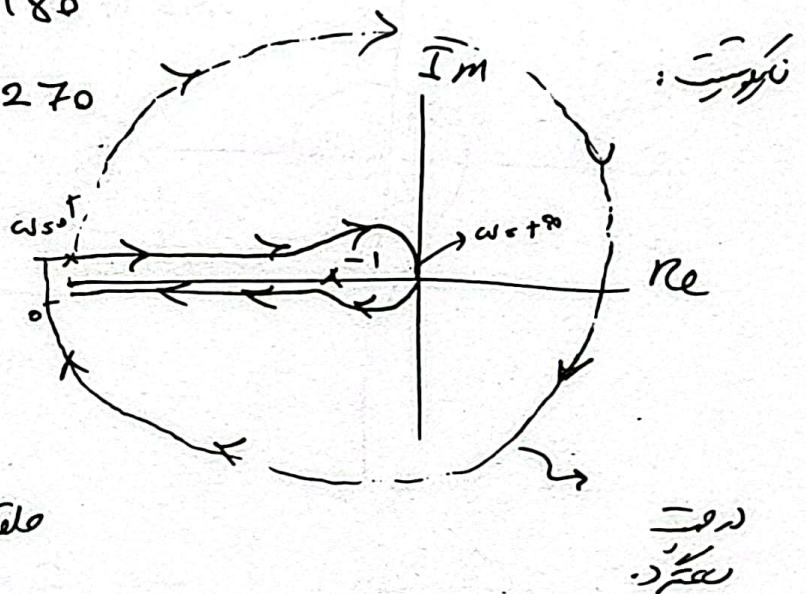
$$\omega \rightarrow +\infty \rightarrow 0^+ \angle -270$$

$$P = 0$$

$$N^- = -2$$

$$N^+ = P - 2$$

$$\Rightarrow Z = 2 \text{ حلقه بسته کاپی}$$



مثال : در رسم نمودار نیکویست، برای تابع زیر، شرایط پایدار بودن سیستم را بررسی کنید.

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

برای بررسی نیکویست، تعین کنید.

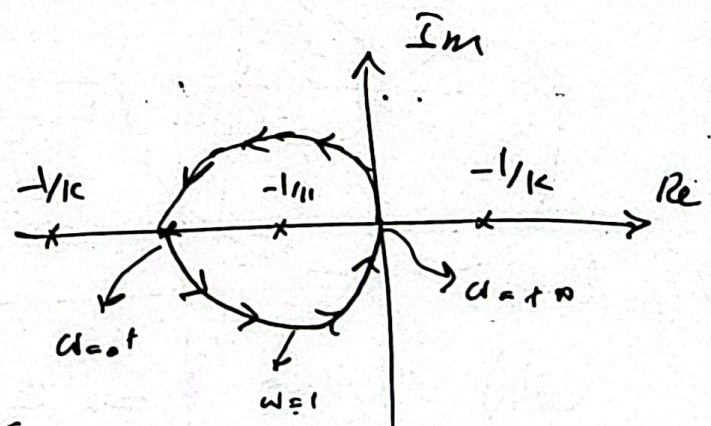
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega - 1} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \angle -\tan^{-1}(-\omega)$$

$$\angle -(\pi - \tan^{-1}(\omega))$$

$$\omega \rightarrow 0 \rightarrow 1 \angle -180^\circ$$

$$\omega \rightarrow 1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -135^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow 0 \angle -90^\circ$$



$$P = 1$$

نیکویست

نیکویست در حلقه باز

۱۶

$$-\infty < -1/k < -1 \quad N=0 \quad ①$$

$$-1 < -1/k < 0 \quad N^+ = +1 \quad ②$$

$$0 < -1/k < +\infty \quad N=0 \quad ③$$

$$① \Rightarrow 0 < k < 1 \rightarrow N=0, P=1 \rightarrow Z=1 \quad \text{ناپایدار}$$

$$② \Rightarrow 1 < k < \infty \rightarrow N^+ = +1, P=1 \rightarrow Z=0 \quad \text{پایدار}$$

$$③ \Rightarrow -\infty < k < 0 \rightarrow N=0, P=1 \rightarrow Z=1 \quad \text{ناپایدار}$$

$$\text{نتیجه کلی: } -\infty < k < 1 \rightarrow \text{ناپایدار}$$

$$1 < k < \infty \rightarrow \text{پایدار}$$

$$k=1 \rightarrow \text{مرز پایداری}$$

گزینه: بررسی نمودار ناپایداری، تابع

$$G_{\text{un}} = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4} \quad \text{پایدار}$$

این سیستم را به ازای مقادیر مختلف k بررسی کنید.

گزینه: سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز زیراد نظارت کننده

$$G(s) = \frac{10 K (s + 0.5)}{s^2 (s + 2) (s + 10)}$$

برای مثال معده، پایداری ناپایدار است. به ازای حلقه فیدبک منفی، مشخصات خواص مختلف پایداری

کاربرد فضا پایداری نایکویست در مهندسی

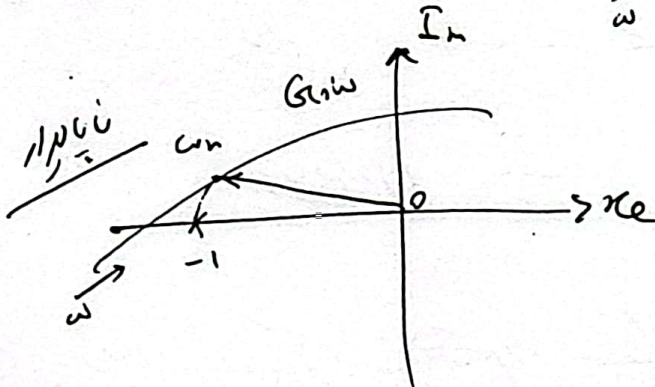
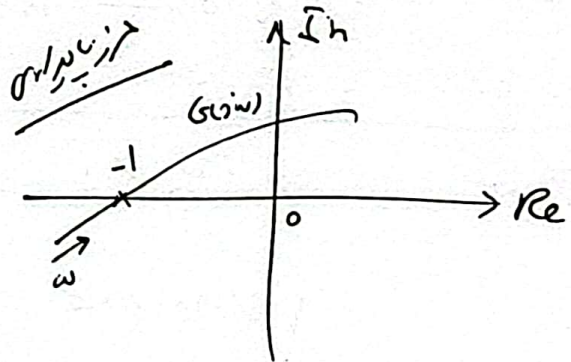
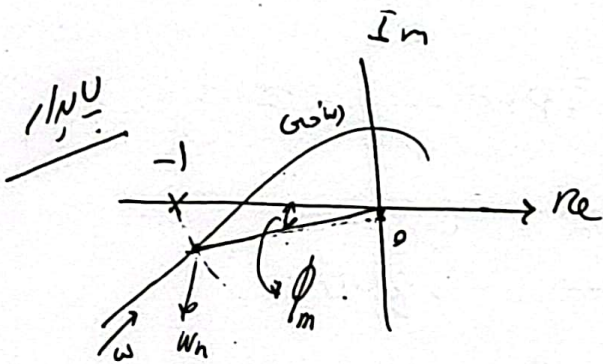
در اکثر سیستم های مهندسی، مقبض های مدار باز، اعداد حقیقی مقنن (یا صفر) هستند.

به عبارت دیگر سیستم مدار باز پایدار یا در مرز پایداری است.

نرا P_s بوده، با توجه به اینکه $N \leq P - Z$ است، داشتن صحت در پایداری

چنین سیستم های مدار بسته ای آن صحت از دیگرام نایکویست که به ناصیه اطراف نقطه -1 است.

مردمی شود، جائز الصحت خواص مدور.



* حد فاز (P.M.): در جایی که اندر $M(\omega) = 1$ در نمودار بزر 0 dB باشد

در دیگرام نایکویست دایره ای به شعاع واحد و مرکز صفر رسم کرد تا جایی را در نقطه ای به مرکز

ω_n قطع کند. فاز $\phi(\omega_n)$ راستخشی می کشد، تفاوت آن تا زاویه فاز 180° را

حد فاز می نامیم.

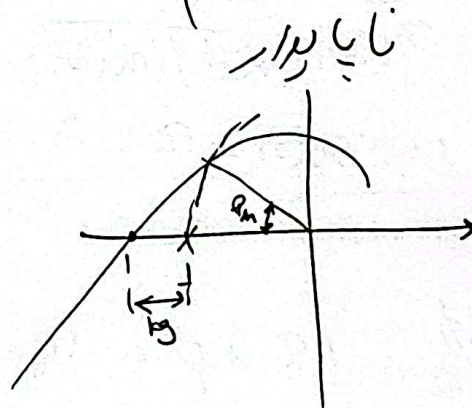
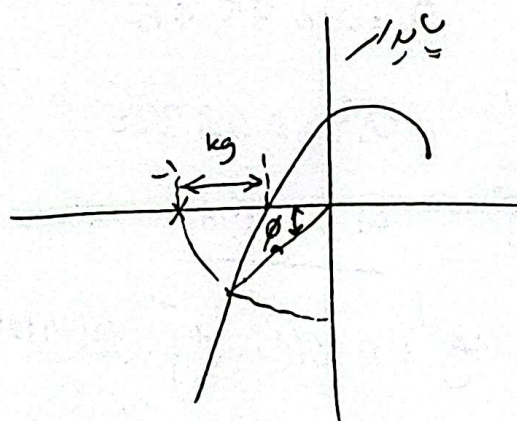
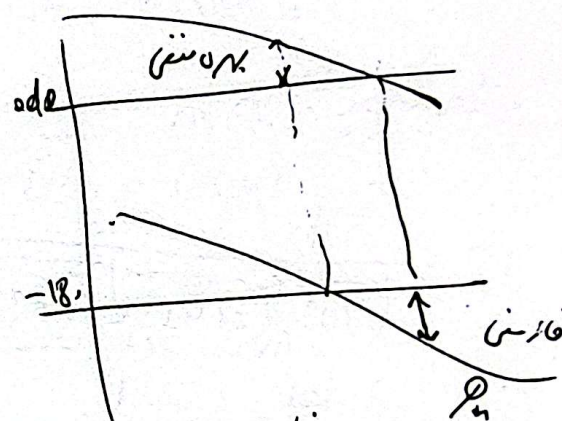
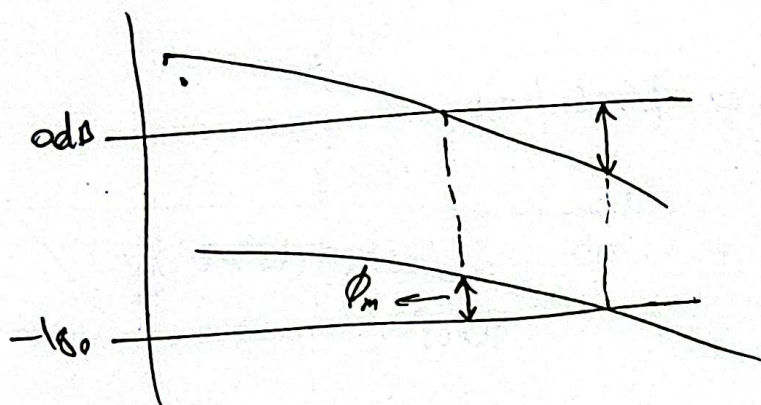
$$\text{حد فاز} = 180 + \phi(\omega_n)$$

16

حد بهره (بزرگنمایی) (g.m.) : در فرکانس ω_p یعنی جایی که زاویه فاز $\phi(\omega_p)$ برابر با -180° است، بزرگنمایی را می‌توان به سادگی برابر حد بهره محاسبه کرد.

$$g.m. = -\mu(\omega_p) \text{ dB} \quad |G(\omega_p)| = 1$$

$$kg = 20 \lg \left| \frac{1}{G(s)} \right| = -20 \lg |G(s)|$$



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

حاشیه بهره، حاشیه فاز را می‌توان به سادگی برابر:

$$\phi = -180^\circ \Rightarrow \text{حاشیه بهره}$$

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(\omega/5) - 90 = -180$$

$$\tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(\omega/5) = 90$$

$$\tan^{-1}(a+b) = \frac{\tan^{-1}(a) + \tan^{-1}(b)}{1 - \tan^{-1}(a)\tan^{-1}(b)}$$

$$\frac{\omega + 0.2\omega}{1 - 0.2\omega^2} = \infty \Rightarrow \omega^2 = 5 \rightarrow \underline{\omega = \sqrt{5}}$$

$$g.m. = -20 \log |G(j\omega)| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\omega^2} \sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{\omega^2 + 25}} \Big|_{\omega = \sqrt{5}}$$

$$= -20 \log \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{6} \sqrt{30}}$$

$$= 29.54 \text{ dB}$$

في $\omega = 0$ P.m. $\angle G(j\omega) = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2} \sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{\omega^2 + 25}} = 1 \Rightarrow \omega^2 (\omega^2 + 1) (\omega^2 + 25) = 1$$

$$x = \omega^2$$

$$x = \frac{1}{(x+1)(x+25)} \Rightarrow x = 0.03846$$

$$x(0) = 2$$

$$\frac{\omega^2}{\omega^2 + 1}$$

$$\omega^2 = 0.03846$$

$$\underline{\omega = 0.1961}$$

$$\phi_m = 180^\circ + \phi = 180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}(0.1961) - \tan^{-1}(0.1961 \times 0.2)$$

$$= 76.66^\circ$$

17

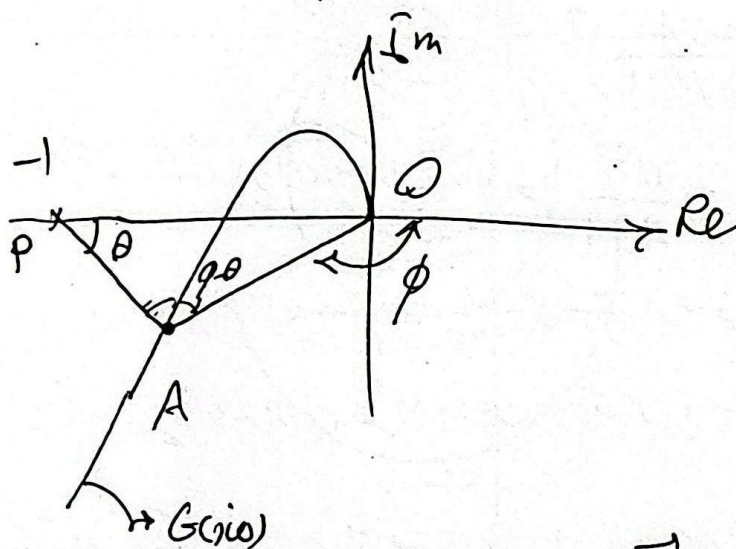
* پاسخ دافنس حلقه بسته با فیدبک واحد

برای سیستم حلقه بسته پدیدار دافس پیچور واحد پاسخ دافنس را می توان به سادگی از:

پاسخ حلقه باز بدست آورد.

تابع تبدیل را بر راد تقو بدیم

در نمودار نایکویست:



$$\vec{OA} = G(j\omega)$$

که در آن ω دافنس نقطه A است.

$$\angle G(j\omega) = \angle \vec{OA}$$

$$PA = 1 + G(j\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{OA}}{\vec{PA}} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$$

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M e^{j\phi}$$

در صورتی که

مقدار M ، مکان هندسی دافس - ثابت و مکان هندسی فاز - ثابت را بدیم.

$$G(j\omega) = X + jY$$

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|} \Rightarrow$$

در صورتی که:

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2} \Rightarrow$$

$$X^2(1 - M^2) - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0$$

به ازای $M=1$ معادله نشان می‌دهد $X = -1/2$. این معادله مختار است و موازی با محور Y است که از نقطه $(-1/2, 0)$ می‌گذرد.

به ازای $M \neq 1$ معادله M صریحاً از تبدیل خواهد شد:

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2-1}X + \frac{M^2}{M^2-1} + Y^2 = 0.$$

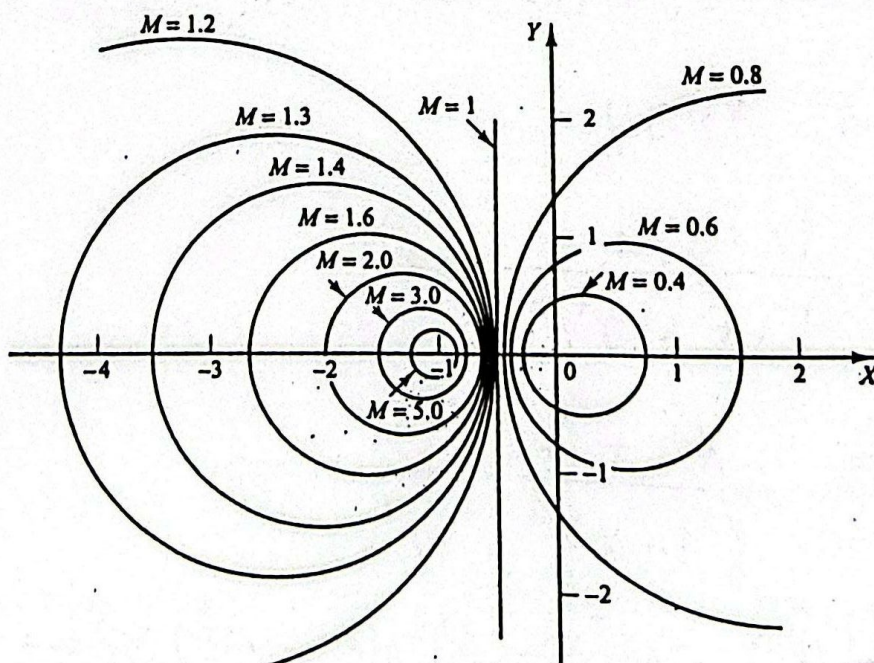
با افزودن جمله $\frac{M^2}{(M^2-1)^2}$ به طرفین داریم:

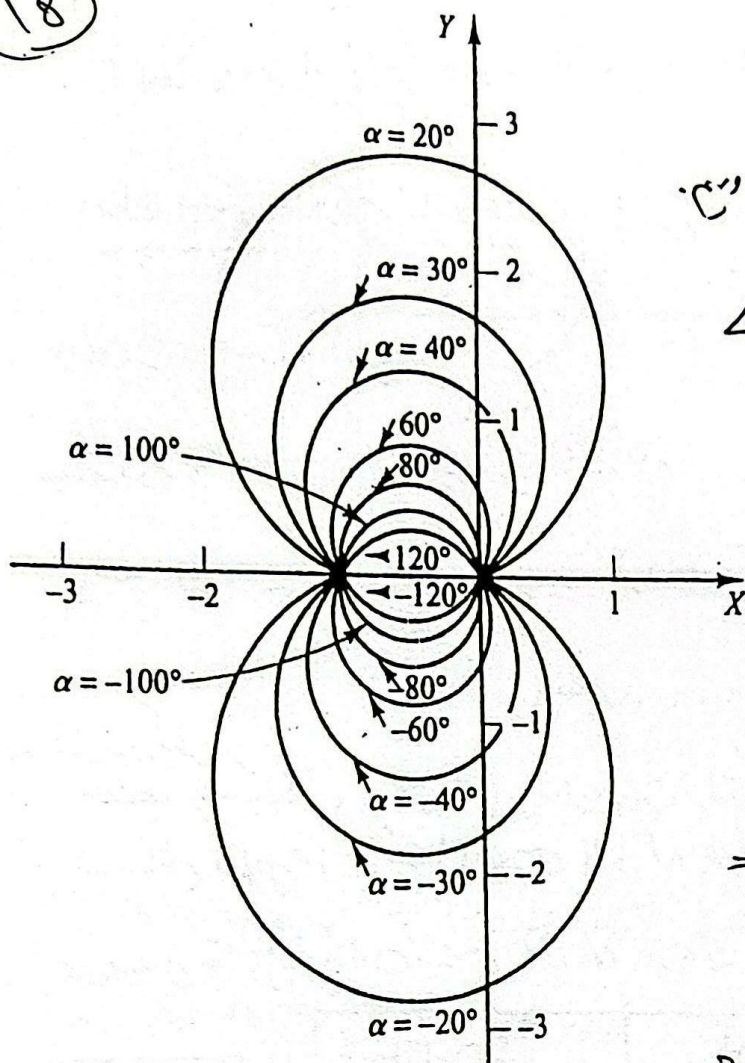
$$\left(X + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{M}{M^2-1}\right)^2$$

معادله دایره‌ای به مرکز $Y=0$ و $X = -\frac{M^2}{M^2-1}$ و شعاع $\left|\frac{M}{M^2-1}\right|$ است.

بین مکان لنگه‌های M ثابت در صفحه دایره‌ای یک دسته دایره است. مرکز شعاع دایره را به ازای هر M خاص می‌توان به سادگی یافت.

← با زیر نظر گرفتن M مثبت به 1، دایره‌های M کوچک‌تر شده، به سمت نقطه $(0, 1)$ میل می‌کنند.
 ← به ازای M مرکز دایره‌های M ثابت به سمت چپ نقطه $(0, 1)$ حرکت می‌کنند.
 ← به ازای $M < 1$ ، دایره‌ها کوچک‌تر شده و به سمت چپ می‌آیند. به ازای $M < 1$ ، مرکز دایره M به سمت راست مبدأ حرکت می‌کند.





* مکان هندسی فاز ثابت (دایره های N)

زاویه فاز را به صورت X و Y به صورت زیر می‌نویسند:

$$\angle e^{j\alpha} = \angle \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

زاویه α برابر است با:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1+X}\right)$$

$$\tan \alpha = N$$

تعریف:

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\Rightarrow N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \left(\frac{Y}{1+X}\right)} = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N}Y = 0$$

با افزودن $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$ به طرفین معادله داریم:

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$

این معادله دایره‌ای به مرکز $X = -\frac{1}{2}$ و $Y = \frac{1}{2N}$ و شعاع $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2}}$ است.

این معادله به ازای $X=0$ و $Y=0$ و همچنین $X=-1$ و $Y=0$ برقرار است. این دو نقطه در تمام

دایره‌های N از هم جدا و نقاط 1 و -1 را نشان می‌دهند.

با داشتن معادله N می‌توان مکان هندسی α ثابت را هم به رسم نمود (به شکل نشان داده شده است).

دایره ثابت است.

استفاده از دایره های M و N ما قادریم سازد بدون حساب دفاز بهیج تبدیل

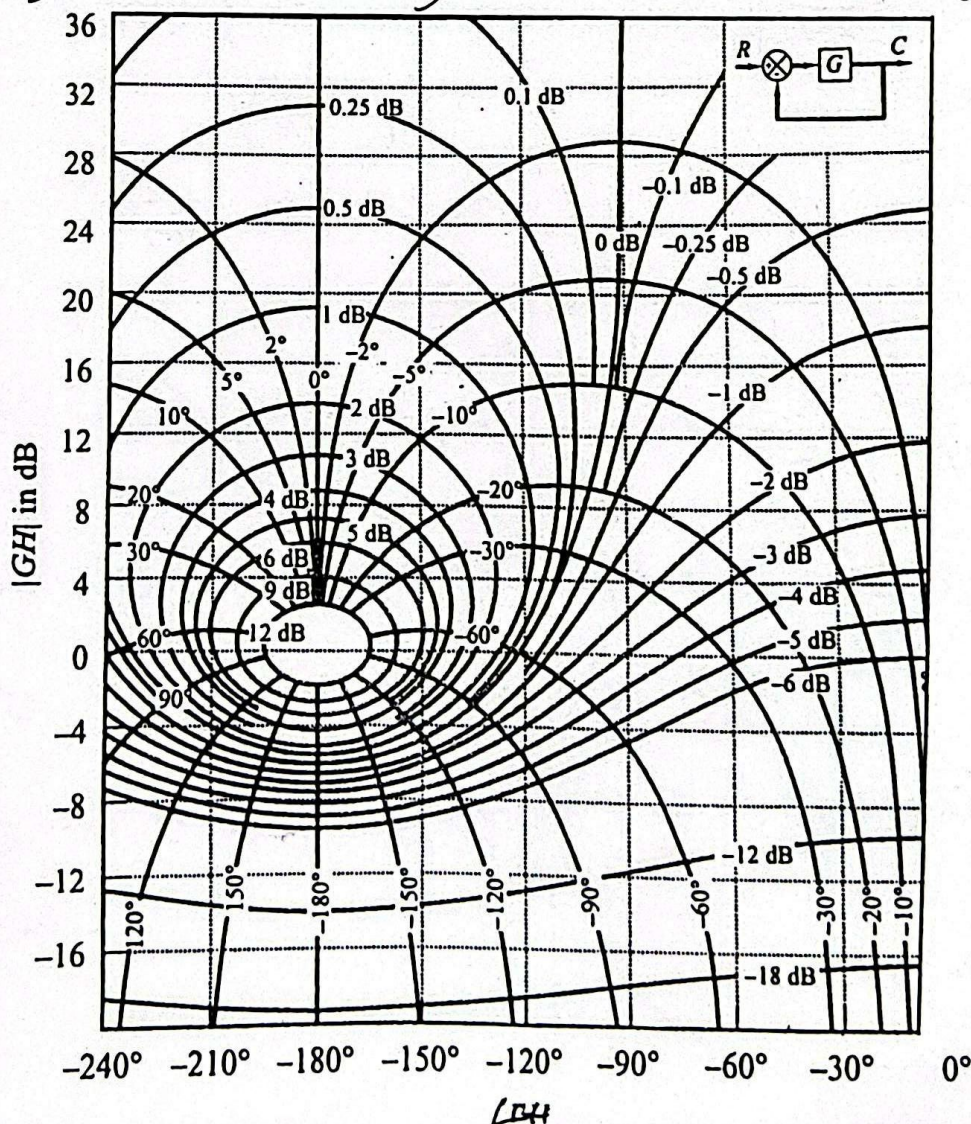
حلقه بسته در فرکانس های مختلف، پاسخ فرکانس کامل حلقه بسته ما از پاسخ فرکانس حلقه باز

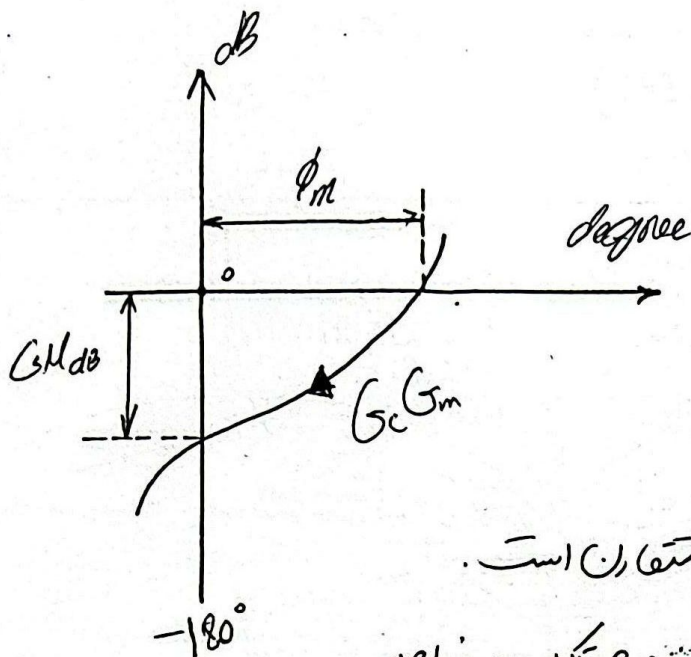
(باز) G به دست می آوریم.

کمترین: در رسم نمودن تکلیف حلقه باز $G(D) = \frac{K}{S(S+1)}$ و نمودارهای N و M
پاسخ حلقه بسته سیستم است اولیه. (دانه دفاز حلقه بسته)

* نمودار نیکولز

در عمل طلوع ترسیم مکان هندسی N و M در صفحه کوارنتی دانه به حسب فاز مناسب گراست
نمودارهای مشکل از مکان هندسی N و M در صفحه کوارنتی دانه به حسب فاز نمودار نیکولز نامیده می شود.





در شکل گویا به دست آورد

حد فاز (ϕ_m)

در هر یک از

در شکل نشان داده شده است.

• نمودارهای شکل زیر نسبت به محور -180° متقارن است.

• مکان های هندسی M و N در هر 360° درجه تکرار و در فواصل

180° در برابر متقابل اند. مرکز مکان های هندسی M نقطه بحرانی $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ است.

• با رسم خطی یا سطح فرکانسی حلقه باز در محور 180° (نقطه برخورد خطی یا سطح فرکانسی (نقطه 0))

مکان های هندسی M و N مقادیر دلخواه M و زاویه α یا سطح فرکانسی حلقه نسبت

را در فرکانس های مختلف نتیجه خواهد داد.

• اگر مکان های هندسی M و N را قطع کنند، یکدیگر را می بیند، اما مقدار

قطر تشدید یا سطح فرکانسی حلقه نسبت خواهد بود.

• فرکانس تشدید از فرکانس متناظر با نقطه تماس آسان تر می باشد.

• می توان نیروی باند M را با N چارت نیکولز به دست آورد. نیروی باند فرکانس است که

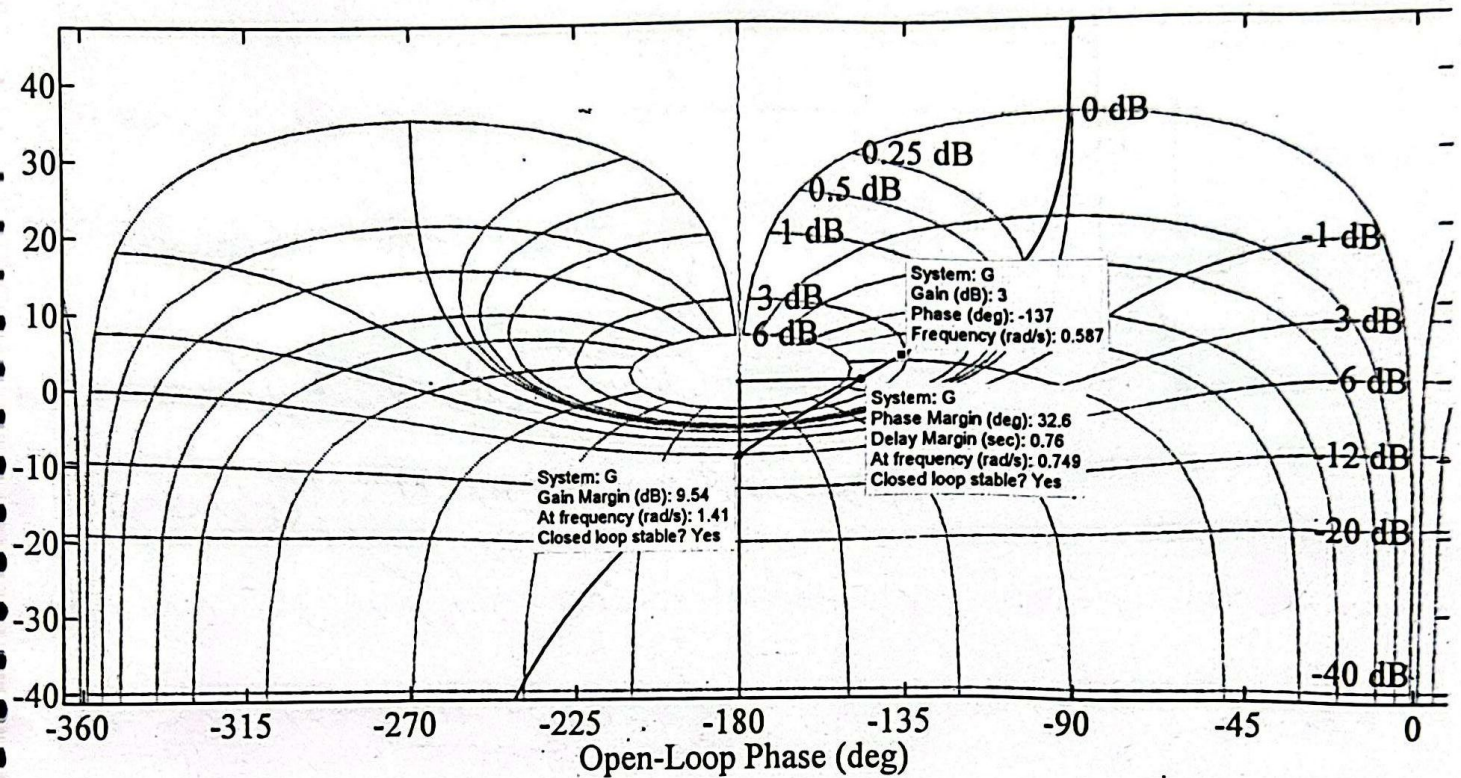
مکان M به پایین 0.707 یا -3.03 dB می رسد. بنابراین در نمودار نیکولز

نیروی باند فرکانس است که وقتی تابع بهره حلقه $M = -3 \text{ dB}$ را قطع کند.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

$$K=1$$

مثال:



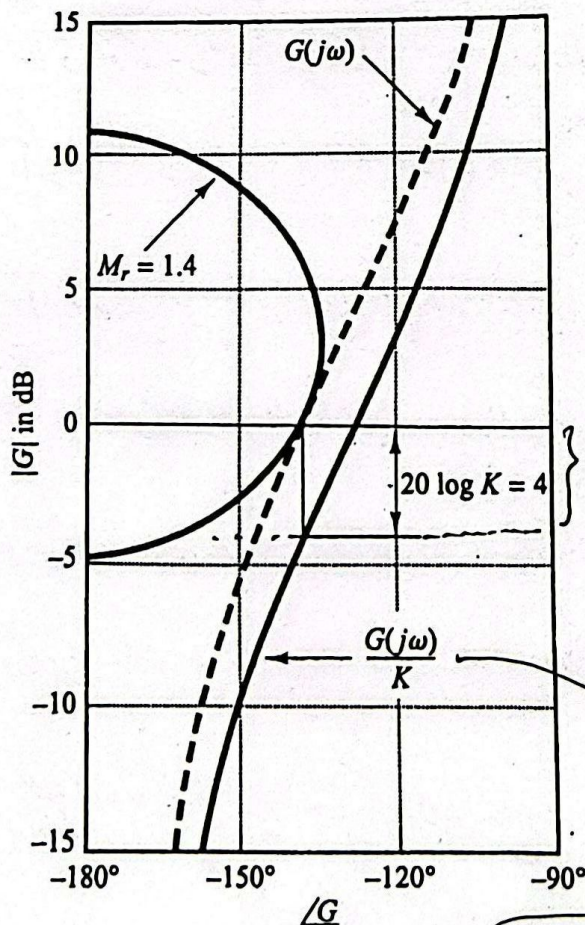
مکین : سیستم کنترل مکانیک ویدیو ویدیو
حالت باز زیر رادیکال کبر

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

ادین کام قسین به ک و س نوادر قطبی $G(s)/K$ است :

$$20 \log K = 4$$

$$K = 1.59$$



برای مکانیک $G(s)/K$ (پیشین) $M_r = 1.4$

نمودار به اندیشه و س و س نوادر قطبی M_r است :

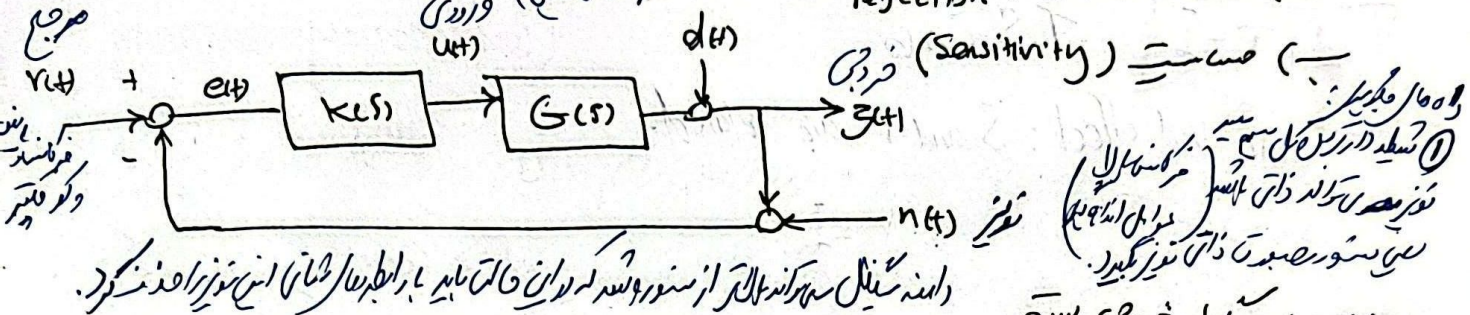
* خواص سیستم های فیدبک

دو خاصیت مهم سیستم های فیدبک عبارت است از:

$$S = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{du}{u}}$$

نسبت درصد تغییرات خروجی به درصد تغییرات ورودی

الف) حذف اغتشاش (disturbance rejection)



- $y(t)$: سیگنال خروجی سیستم
- $u(t)$: سیگنال ورودی سیستم
- $r(t)$: سیگنال مرجع (معمولاً دارای فرکانس کمیک است) (باید توسط سیستم تصحیح شود)
- $d(t)$: سیگنال درون اغتشاش (معمولاً دارای محتوای فرکانس کمیک است) (معمولاً باید فیلتر شود)
- $n(t)$: سیگنال درون نویز (معمولاً دارای محتوای فرکانس بالا است) (معمولاً باید فیلتر شود)

برای سیستم نشان داده شده در شکل:

$$Y(s) = G(s)K(s)(I+GK)^{-1}R(s) + (I+GK)^{-1}D(s) - GK(I+GK)^{-1}N(s)$$

آر حضا با به صورت $E(s) = R(s) - Y(s)$ و $e(t) = r(t) - y(t)$

$$E(s) = (I+GK)^{-1}R(s) - (I+GK)^{-1}D(s) + \underbrace{GK(I+GK)^{-1}}_{\text{Return difference}} N(s)$$

لحظ کنید خروجی محرک یعنی ورودی به سیستم اصلی $U(s)$ عبارت است از: (رابطه یابی)

$$U(s) = K \underbrace{(I+GK)^{-1}}_{\text{return difference}} [R(s) - D(s) - N(s)]$$

برای این اس می فیدبک هم به صورت زیر تعریف می شود:

$$J(s) = I + G K \quad \text{: Return difference} \quad \star$$

$$S(s) = (I + GK)^{-1} = \mathcal{J}(s)^{-1}$$

تابع حساسیت
(Sensitivity) function

$$T(s) = GK (I + GK)^{-1}$$

تابع حساسیت

تابع متعاضد حساسیت

$$\boxed{S + T = I} \quad T, S \text{ تابع}$$

(Complementary sensitivity function)

water bed effect: S and T are related.

$$S(s) + T(s) = 1 = I$$

که در همه فرکانس ها همداره

برای این سیستم را به بین ورودی و خروجی های سیستم حلقه بسته به صورت زیر می توانیم بنویسیم:

$$Y(s) = S(s) D(s) + T(s) [R(s) - N(s)]$$

بازخورد سیستم
از خروجی به ورودی

$$E(s) = S(s) [R(s) - D(s)] + T(s) N(s)$$

$$u(s) = \frac{K S(s)}{TG^{-1}} [R(s) - D(s) - N(s)]$$

کنترل کننده
برای این سیستم، باید هر دو را در نظر بگیریم.

(1) حذف اغتشاش $D(s)$: باید $S(s)$ کوچک باشد تا اثر اغتشاش را به حداقل برساند.

تعریف $S(s)$ ملاطفتی شود که همان کوچک کردن $S(s)$ باید دهانه های بزرگ باشد.

(2) تعقیب (Tracking): برای این منظور خطای تعقیب یعنی $E(s)$ کوچک باشد یعنی مقدار $S(s)$ کوچک شود.

$S(s)$ کوچک شود.

(3) حذف نویز اندازه گیری $N(s)$: باید $T(s)$ کوچک باشد تا اثر نویز اندازه گیری کم شود.

با تعریف $T(s)$ مشاهده می شود که $G(s)K(s)$ باید کوچک باشد.

(4) محدودیت محرک ها $U(s)$: برای این منظور $K(s)S(s)$ باید محدود باشد. دانستن محدودیت

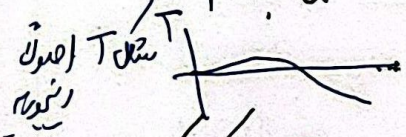
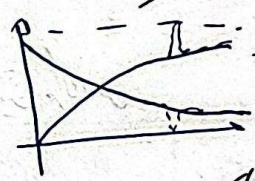
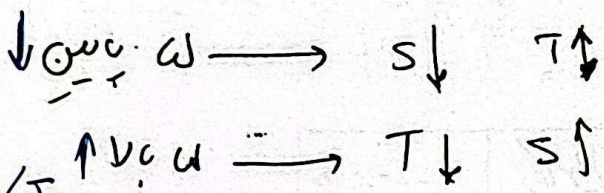
انرژی نکته کلیدی می باشد، می توان آن را با کمک کدیکس استفا را بخواند.

به منظور حذف اغتشاش و بهبود تعقیب نیاز به کوکیده شدن حساسیت است.
 برای حذف نوسان نیاز به کوکیده شدن مستقیم حساسیت است.
 با این حال اگر توجه بدینکه $S(s) + T(s) = I$ است نمی توان هر دو تابع را با هم کوکیده نمود.

* راه حل

در محل ورود منفی (درین فرمان) $R(s)$ و ورودی های مزاحم $D(s)$ سیگنال های بازخوردی پهن می کنند به عبارت دیگر آنرا به آهستگی بازین تصویر می کنند در حالی که نوسان اندازنده $N(s)$ تشنگی بازخوردی بالا است. پس می توان هر دو هدف را به دست آورد به این ترتیب که S در فرکانس های پهن کوکیده

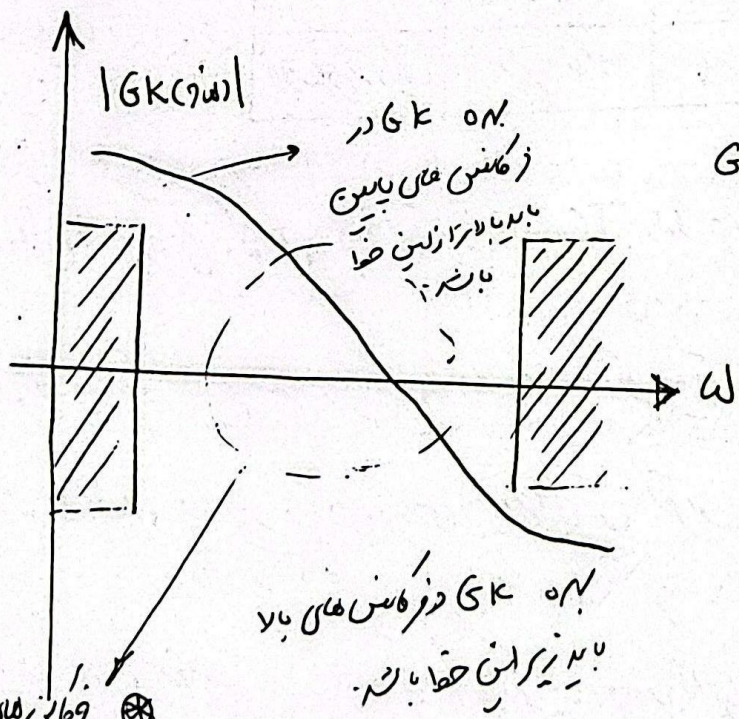
تبدیل داشته شود و T را در فرکانس های بالا کوکیده کند داریم:
 در این صورت این تبدیل را می توانیم به صورت زیر نشان دهیم که تغییر دایره صفتی که برای کم کردن اثر نوسان



برای کوکیده نگاه داشتن اثر نوسانی T باید کوکیده شود

$$R(s)S(s) = K(s)(I + GK)$$

$$= T(s)G(s)^{-1}$$



* نمودار بودی: اندازد $GK(s)$

بر حسب ω در فرکانس های مختلف

⊗ $GK(s)$ در فرکانس های پهن

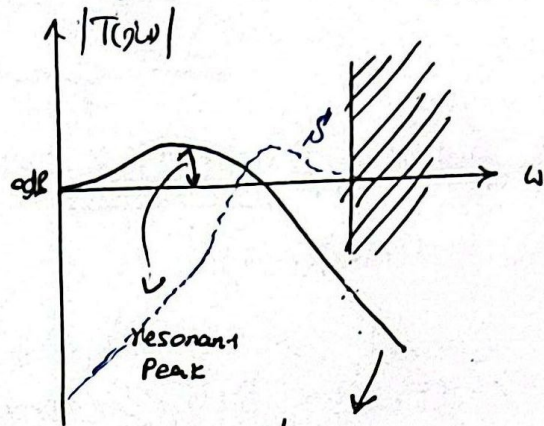
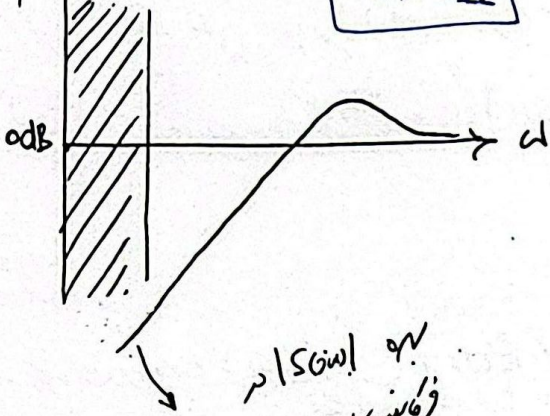
دارای پهن طاری به بالا بود که

اثر آن تعقیب خوب و حذف ورودی های اغتشاشی و مزاحم است.

در فرکانس های بالا باید تابع تبدیل مدبر باید کوکیده باشد که خطای اندازنده را از بین ببرد می گویند حذف فاز را کنده می گویند.

نمایش ریاضیاتی مطلوب حساسیت $S(s)$ و مخرج حساسیت $T(s)$ را نشان می‌دهد.

$$T + S = 1$$



بهره $S(s)$ اند
فرکانس‌های پایین زیر این خط است.

بهره T در فرکانس‌های بالا
زیر این خط است.

(مخرج) S : در فرکانس‌های پایین کوچک باشد - در فرکانس‌های بالا 0 dB باشد.
(مخرج) T : باید در فرکانس‌های پایین 0 dB باشد - در فرکانس‌های بالا کوچکتر باشد.

ویژگی فرکانس

خوف	فرکانس‌های پایین	فرکانس‌های بالا	فرکانس‌های میانه
افقار مطلوب	بالا	پایین	بهره تغییر کند
ضد اغتشاش	بهره بالا	پایین	بهره تغییر کند
ضد نویز و اغتشاش	بهره بالا	بهره کوچک	بهره تغییر کند

ظرف در این حالت است
اصل فیلتر می‌باشد.

* سوال: برای کوچک کردن $S(s)$ و $T(s)$ را با چه ابزار می‌توان تغییر نمود؟

پاسخ: به این که تابع تبدیل سیم می‌تواند مربوط به کوسین $\cos$ یا به صورت $\sin$ یا به صورت $\exp$ باشد.

مهم باشد، تقابیر ریاضی مناسب باید برای این تعریف شوند.

در کنترل مدام، مفهوم کوچک کردن با مقادیر تکین یا Singular values (SV) می‌شوند.

۹۵

مقدار کمترین با نرم سیستم ارتباط مستقیم داشته و ثابت می شود که

نرم سیستم برابر با مقدار کمترین بیشینه سیستم در خطه زده می باشد. برای بدست

آوردن شروع بهینه فرض می شود اثر اغتشاش در خروجی سیستم حلقه بسته به مقدار W

$$W(s) = S(s) \cdot D(s) \quad \text{تعبیر جامع}$$

کمی در اعلاف کننده کوچک کردن انداز اغتشاش خروجی است. اگر از نرم W خروجی

استفاده و در این به نرم ضربه متغیر آن توجه شود:

$$\|W\|_2 = \left(\sum |w_i|^2 \right)^{1/2} = (W^* W)^{1/2}$$

مقدار آنرا در مجموع مخلوط است.

$$\|W\|_2^2 = (SD)^* (SD) = D^* (S^* S) D$$

تعبیر فیزیکی این را به این صورت می توانیم بیان کنیم که اغتشاش D و اثر آن در خروجی سیستم

W می تواند به صورت زیر ~~تفسیر~~ نمود. اگر انداز اغتشاش $\|D\|$ در یک فرکانس خاص داده شده باشد

در فضای چهار بعدی و به صورت هندسی می توان D را به صورت بردار در نظر گرفت.

استدلال اثر نیز به این صورت می تواند بیان شود که اغتشاش D در فضای چهار بعدی معلوم است.

دست نه کنترل، هدف آن است که اثر اغتشاش که با نرم در W تعیین می شود، کمینه گردد. حال

در این فرکانس خاص در صورتی که استاندارد D در راستای خاص بردارهای دیگر، S قرار گیرد،

استدلال آن حفظ شده، آنرا می توان به حد اکثر خود در استاندارد خواهر اعلام کرد.

$$\max \|W\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(S^*S)} \|D\|$$

$$\min \|W\|_2 = \sqrt{\lambda_{\min}(S^*S)} \|D\|$$

این دو استاندارد، به ترتیب استانداردهای بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه حداکثر و حداقل خواهد بود.

لذا، کران بالا و پایین انداز، بردار W ؛ ضرایب مقادیر ویژه حداکثر و حداقل ماتریس مربعی مقدار ویژه حداکثر (S^*S) مربوط خواهد شد.

از آنجایی که در کنترل مقاوم میباید کردن بهترین حالت است، کران بالای مورد توجه خواهد بود. این نکته را با عنوان مقدار گینج ماتریس S نامگذاری نموده اند.

$$\sigma(S) = \sqrt{\lambda(S.S^*)} \text{ or } \sqrt{\lambda(S^*.S)}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}(S) = \sigma_{\max}(S)$$

$$\underline{\sigma}(S) = \sigma_{\min}(S)$$

$$\underline{\sigma}(S) \|D\|_2 \leq \|W\|_2 \leq \bar{\sigma}(S) \|D\|_2$$

همچنین در صورتی که S^{-1} وجود داشته باشد،

$$1) \quad \bar{\sigma}(S) = \frac{1}{\underline{\sigma}(S^{-1})} \quad \text{و} \quad \underline{\sigma}(S) = \frac{1}{\bar{\sigma}(S^{-1})}$$

$$2) \quad \det(S) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$$

$$3) \quad \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$$

$$4) \quad \bar{\sigma}(A.B) \leq \bar{\sigma}(A) \cdot \bar{\sigma}(B)$$

(23)

$$5) \sigma(A) - 1 \leq \sigma(I + AB) \leq \sigma(A) + 1$$

$$6) \max[\sigma(A), \sigma(B)] \leq \sigma[A \ B] \leq \sqrt{2} \max[\sigma(A), \sigma(B)]$$

یکی از راه های ساده مقایسه کردن، استفاده از بردار ویژه تکلیف درست می باشد.

ماتریس غیر مربعی $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را در نظر بگیرید که $m < n$ باشد. در این حالت

ماتریس مربعی $m \times m$ ، $S^* S$ را در نظر گرفته، بردار ویژه (یا) و بردار ویژه است و V

ماتریس $S S^*$ را بررسی می کنیم. در این حالت، رتبه ای که برای بردار ویژه صورت می گیرد، شکل شود.

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$$

متغیر در طول هم در

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$$

این بدان معنی است که:

$$V^{-1} = V^* \quad \text{و} \quad U^{-1} = U^*$$

حال برای سنجش رتبه ای که برای S می گیریم، (Singular value decomposition) یا SVD می توانیم

$$S = U \Sigma V^*$$

ماتریس S را به صورت زیر تجزیه نمود:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

به صورتی که رتبه این ماتریس برابر با $m = \text{Rank}(S)$ است.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_m$$

مثلاً، مقایسه کنیم $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ نسبت به این.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[U, \text{sigma}, V] = \text{svd}(S);$$

مسئله: مقادیر تکین، بیشینه و کمینه آرسین سه سیتم 2×2 ، $L(s)$ ، $S(s)$ ، $T(s)$ را بدست آورده و رسم کنید.

$$L(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-0.5}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s(s+1)} \end{bmatrix} \quad S(s) = (I + L(s))^{-1}$$

$$T(s) = I - S(s)$$

$$\sigma(L) = \sqrt{\lambda(LL^*)} = \sqrt{\lambda(L^*L)}$$

حل:

$$\sigma(L) = \sqrt{\lambda \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-0.5}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s(s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{s} & 1 \\ \frac{0.5}{s-1} & \frac{1}{s(s-1)} \end{bmatrix} \right)}$$

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{-1.25s^2+1}{s^4-s^2} & \frac{s^3-1.5s}{s^4-s^2} \\ \frac{-s^3+1.5s}{s^4-s^2} & \frac{s^4-s^2+1}{s^4-s^2} \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

شماره $s = j\omega$ ، $\omega = 1$

$\omega = 10^{-2}$ تا 10^2

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{2.25}{2} - \lambda & \frac{-2.5j}{2} \\ \frac{2.5j}{2} & \frac{3}{2} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0485 \\ \lambda_2 &= 2.5765 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.0485 \\ \lambda_2 = 2.5765 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\sigma} = 0.2203 \\ \bar{\sigma} = 1.6051 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\sigma} = -13.1379 \text{ dB} \\ \bar{\sigma} = 4.11 \text{ dB} \end{cases}$$

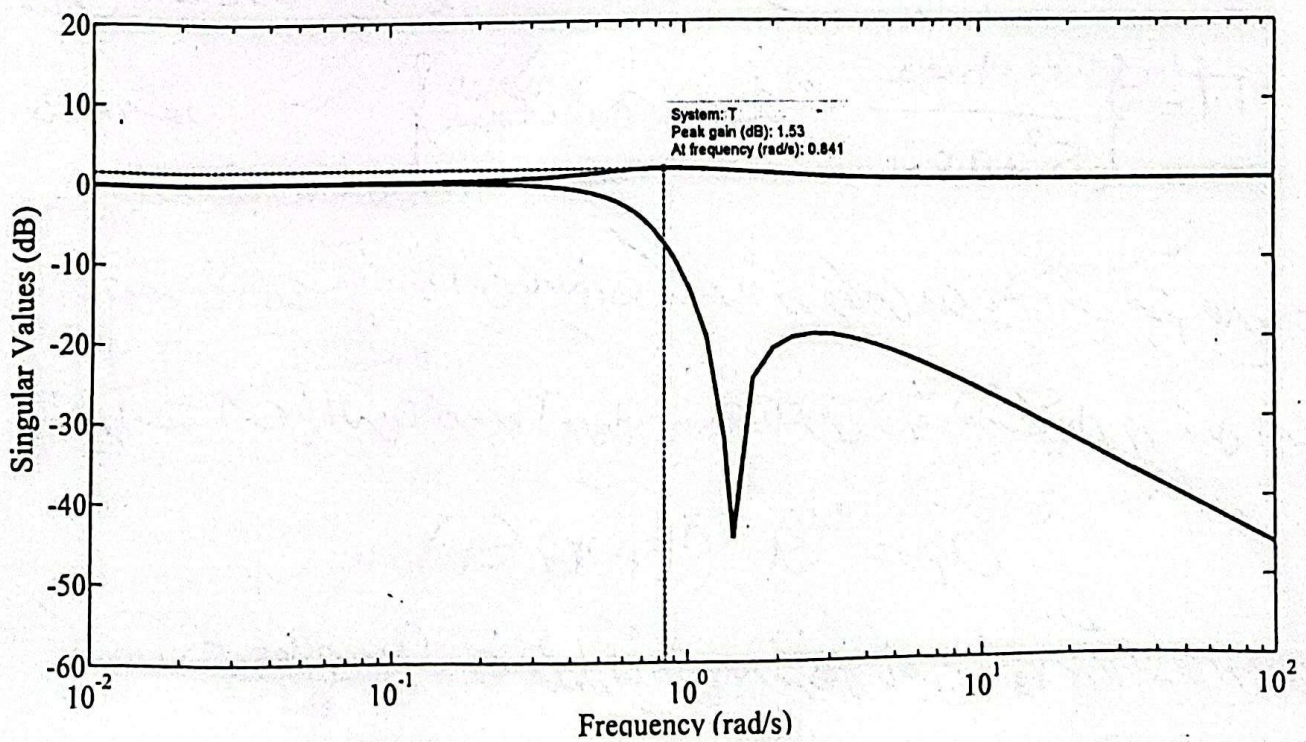
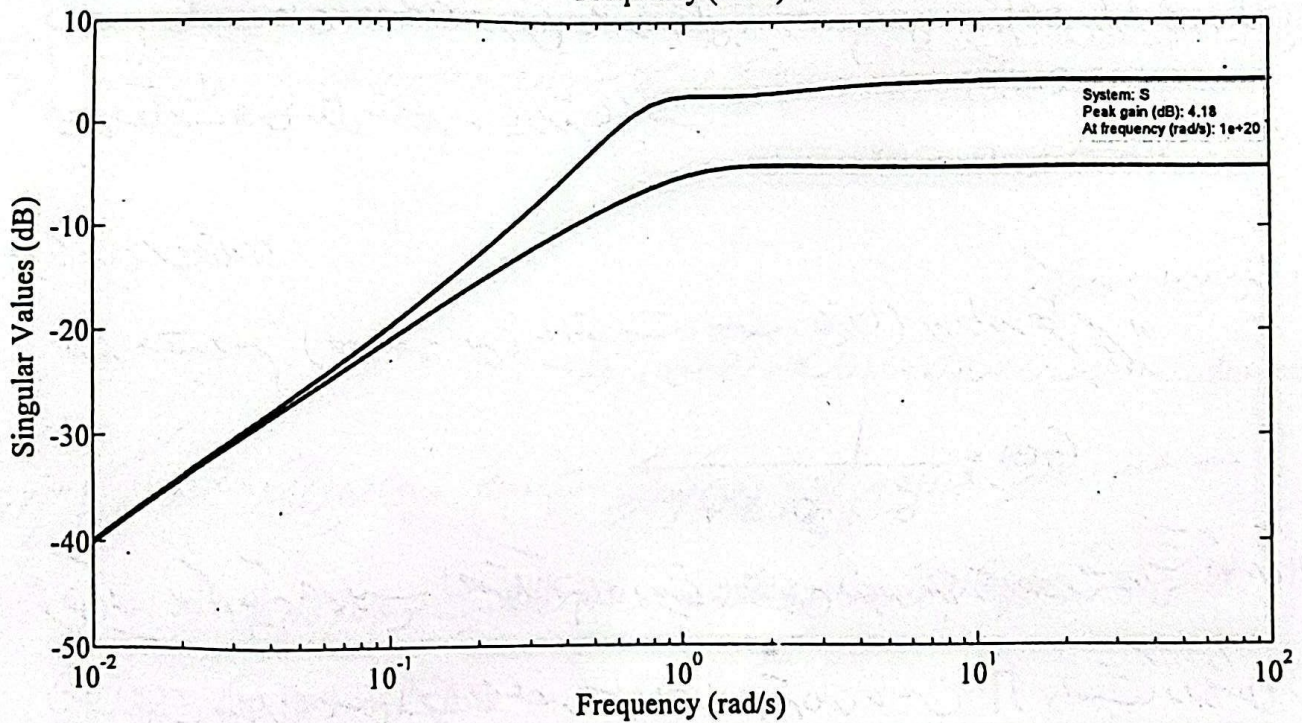
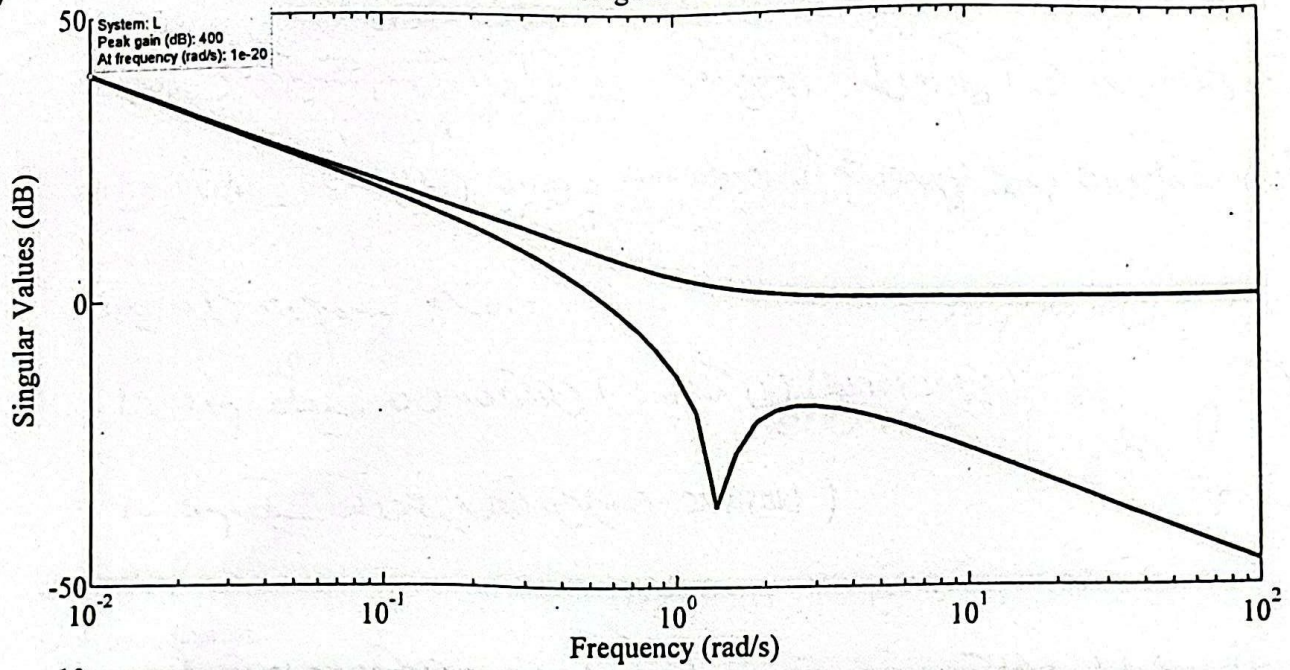
$$S = +f(s')$$

$$L = \left[\frac{1}{s} \quad -0.5/(s+1); \quad 1 \quad 1/(s+(s+1)) \right];$$

$$S = \text{inv}(\text{eye}(2) + L); \quad T = \text{eye}(2) - S; \quad \text{Sigma}(L)$$

24

Singular Values



در مدل ترکیبی، ما می‌توانیم اختلاف بین مدل نامی و مدل واقعی آن وجود داشته باشد.
 این اختلاف به عنوان معنی (uncertainty) شناخته می‌شود. عدم قطعیت‌های توان
 در مدل به دو صورت به‌شده:

۱- عدم قطعیت‌های ساختاری (Structural) (یعنی پارامتری)

۲- عدم قطعیت‌های غیر ساختاری (Unstructured)

در عدم قطعیت‌های ساختاری، فرض می‌شود که مدل، ساختار واقعی سیستم اصلی را داشته باشد، اما
 عدم قطعیت‌های مدل ناشی از پارامترها است.

* نامعنی ساختاری
 سیستم مرتبه دوم (چهارم، دهم، ...) یا (تفاوت - سف - فاز) زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}$$

فرض کنید a که می‌تواند ضریب اصطکاک، (واقعاً) مشخص نبوده و تنها محدوده مشخصات آن است.
 ما این حالت می‌توانیم سیستم G را معضریبی از سیستم‌های نامعنی Π داشت که در شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\Pi = \left\{ \frac{1}{s^2 + as + 1} : a_{min} \leq a \leq a_{max} \right\}$$

با توجه به مشخصات آن، این نامعنی‌ها که معمولاً در فرکانس‌های پایین یک سیستم ظاهر می‌شوند

تقریباً این پارامترها در بازه $[a_{min}, a_{max}]$ فرض شده، به شکل مدل زیر قابل ارائه می‌شوند:

$$a_p = \bar{a} (1 + r_a \zeta_a)$$

که در آن $\bar{a} = \frac{a_{min} + a_{max}}{2}$ مقدار میانگینی پارامترهای نامعنی و r_a بزرگی نسبی به بهره نامعنی می‌باشد.

25

$$r_a = \frac{a_{max} - a_{min}}{a_{max} + a_{min}}$$

در رابطه بالا δ_p (P متغیر پارامتریک) مقدار حقیقی تصادفی کوچکتری مادی می باشد:

$$|\delta_p| \leq 1$$

اگر سیستم ضربه زن باشد باشد

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & 0 \\ 0 & \delta_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{pn} \end{bmatrix}$$

Ureal
Ucomplex

در تویوتو فکت کیر سیستم با نامی پارامتری:

مکین: $G = \frac{m}{s^2 + 2s + 1}$ $m = 2 \pm 30\%$

یا شخ فرکانسی سیستم مادر فرکانس های $\begin{bmatrix} 10^{-2} & 10^{+3} \end{bmatrix}$ در یک دایره

* نامی بدون سفتی

عدم قطعیت های غیر جبری به روشی تقسیم می شوند:

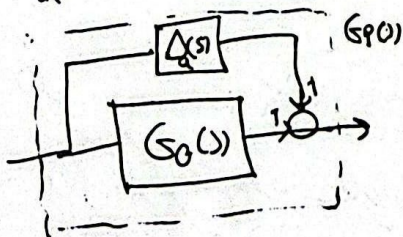
عدم قطعیت های نوع جمع: فرض کنید که سیستم با نامی $G_0(s)$ و $G_p(s)$ در یک دایره باشد. اگر یک سیستم

واقعی به صورت $G_p(s)$ باشد در این صورت در عدم قطعیت نوع جمع داریم:

$$G_p(s) = G_0(s) + \Delta_a(s)$$

دانش رابطه عدم قطعیت جمع (additive uncertainty) به صورت

$$\Delta_a(s) = G_p(s) - G_0(s) \quad \Delta_a$$



توضیح می شود:

عدم قطعیت نوع ضرب: عدم قطعیت نوع

ضرب فرض می کنیم که رابطه بین $G_p(s)$ و $G_0(s)$ به صورت زیر باشد:

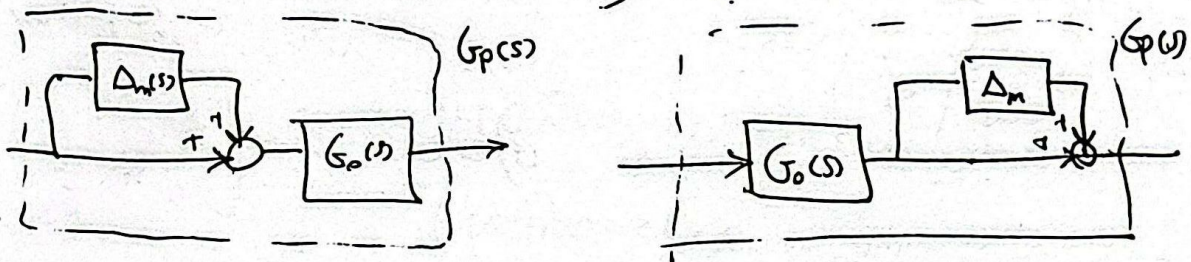
$$G_p(s) = G_0(s) (1 + \Delta_m(s))$$

باشد

$$\Delta_m(s) = \frac{G_p(s) - G_o(s)}{G_o(s)}$$

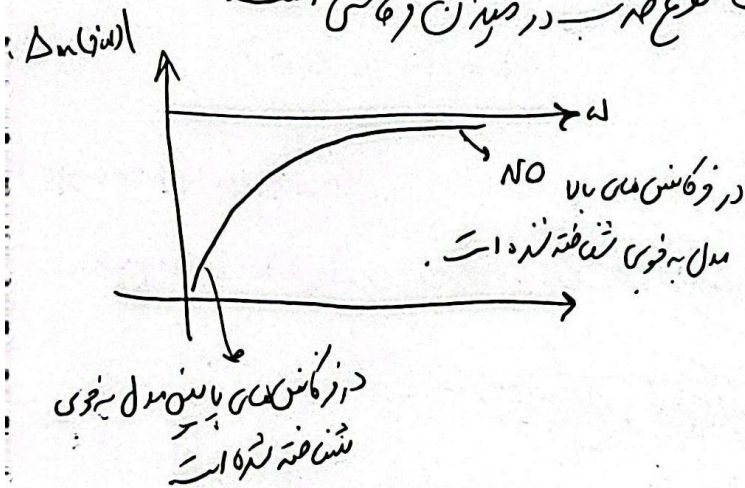
عدم قطعیت نوع ضرب - را می توان

به دو فرم در سری به سیستم اصلی یا در فرم موازی در سیستم اصلی نشان دارد:



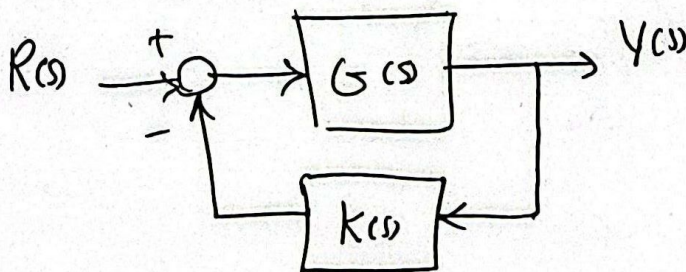
باید توجه داشت که عدم قطعیت نوع ضرب حتماً یکنواختی مدلی را نشان می دهد و به این دلیل بیشتر

معمولاً استفاده نمی شود. نمایش عدم قطعیت نوع ضرب در میدان فرکانسی است.



* پایداری قائم

کدینگ فریدریش: plant: کنترلر را در نظر بگیریم. فرض کنید که کنترلر به مدل نامی سطح اول را می بیند.



آزاد شده باشد:

مدل نامی: $G(s)$

کنترلر: $K(s)$

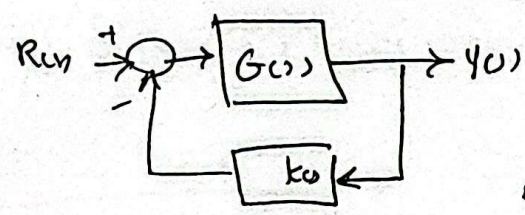
فرض کنید که سیستم مدار بسته پایدار است. در این صورت برای سیستم مدار بسته ای که به جای $G(s)$ ، مقادیر نامی

آن یقیناً $G(s)$ باشد، تعریف زیر را ارائه می کنیم:

اگر سیستم مدار بسته فوق برای مقایسه ولتگی سیستم اصلی یعنی برای (s) یا پیرامون باشد،
مکانیسمی که اصلاح کننده به صورت مقدم سیستم را پدید آورده است.

بیشتر شرایط مورد نیاز برای پیدایش مقدم را می توان از قضیه های به نام قضیه بهره برگرفته استخراج کرد:

★ قضیه نین کوچیک Small Gain Theorem ★



در سیستم شکل زیر، فرض می کنیم که $G(s)$ را اصلاح کننده
 $K(s)$ یعنی سلب نامی سیستم اصلی را اصلاح کننده ورودی پدید آورده است.

دانشی صورت سیستم مدار بسته یا پایداری است اگر: (میشه گفتی برای این قضیه پایداری ناکافیست) داشته باشیم:

$$|G(s)K(s)| < 1$$

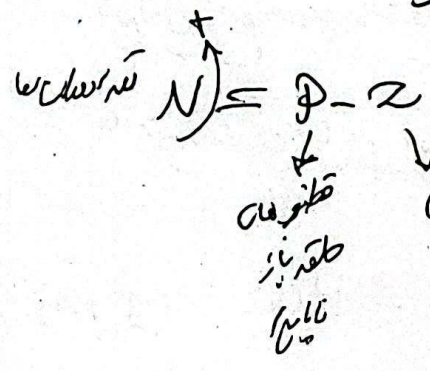
همچنین، به خاطر آن که $|G(s)| < 1$ ، می توانیم بگوییم که سیستم مدار بسته یا پایداری است اگر:

$$|K(s)| < 1$$

باشد.

این قضیه می گوید که برای پیدایش سیستم مدار بسته، باید گین یا بهره مربوط به مدار کوچک باشد. بر طبق
شرط فوق باید تابع تبدیل مدار باز، داخل دایره به شعاع واحد قرار گیرد. زیرا اندازه $G(s)K(s)$ باید کوچکتر
از واحد باشد.

پس صرف نظر از فاز سیستم $G(s)K(s)$ باید دایره ای به شعاع واحد در برگیرد.



$$N=0, p=0 \Rightarrow 2=0$$

فرض اولیه قطب سیستم پایداری

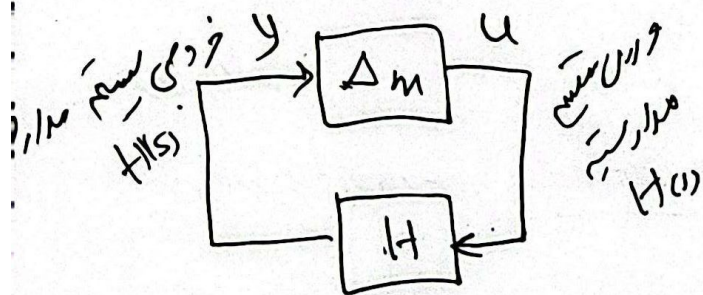
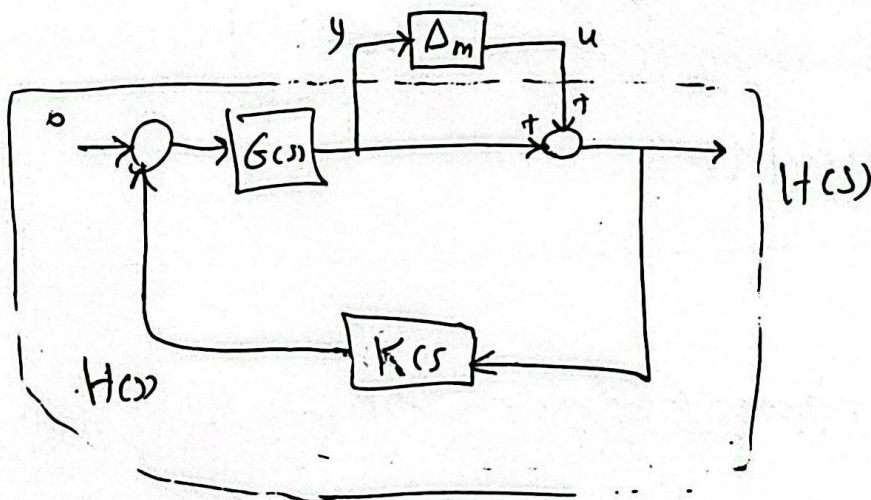
۲ سوال در مورد پایدار بودن سیستم (پایداری مقاوم) مطرح می شود.

★ (الف) شرط برای آنکه عدم قطعیت Δ پایدار و محدود باشد، آیا سیستم مدار بسته برای چنین عدم قطعیت مناسب است یا خیر؟

★ (ب) برای یک سیستم، که فلیکس مقدار عدم قطعیت که باعث ناپایداری سیستم مدار بسته می شود کدام

← بررسی شرط پایداری مقاوم نوع ضرب :

پایان این منظور باید تابع تبدیل را طوری که تکرار صیغه عدم قطعیت Δ_m دیده شود، تعیین کنیم



در اینجا $G(s)$ تابع تبدیل مدار نام سیستم، $\Delta_m(s)$ عدم

قطعیت نوع ضرب در $K(s)$ تکرار خط است

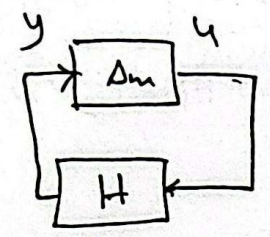
همه این توابع خطی و نامتغیر با زمان هستند و معروف

ما به این ساز مقادیر از طریق طایفه $K(s)$ است

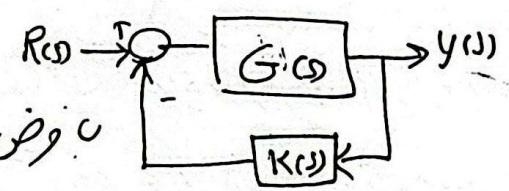
پایدار

$$(y+u) K(s) (-G(s)) = u \Rightarrow \frac{y}{u} = \frac{-GK}{1+GK} \triangleq H(s) \quad (\text{نوع I})$$

باید توجه داشت که در این مدارها $H(s)$ نشان دهنده تابع تبدیل سیستم نامی مدار است و Δ_m عبارت از میزان عدم قطعیت مدار است. در این شکل خودی



از مدلهای $H(s)$ و Δ_m به مدار Δ_m است در حالی که در شکل زیر



با فرض ضریب $R(s)$ ، خروجی از مدار تغییر می کند و در این صورت می توانیم

به عبارت دیگر دلتا نشان دهنده تغییرات در این سیستم است. (در این سیستم تغییرات در خواص مدار)

فرض کنید $H(s)$ و تابع تبدیل عدم قطعیت $\Delta_m(s)$ هر دو پایدار باشند. برای این پایدار بودن سیستم، مدار بسته پایدار است اگر $\Delta_m(s) H(s)$ دو نقطه $+1$ و -1 نداشته باشد. اگر این دو نقطه داشته باشد، مدار بسته ناپایدار است. برای آنکه $H(s)$ دو نقطه $+1$ و -1 نداشته باشد، باید

چون این در رابطه با میزان هم مقادیر مدول باشد. می توانیم بگوییم که برای آنکه این مقادیر پایدار باشد،

$$\sup_{\omega} |\Delta_m(j\omega) H(j\omega)| < 1 \rightarrow \text{آرایش رابطه مدول باشد}$$

در این حالت ناپایدار است و $+1$ و -1 در این مدار بسته پدیدار است.

این مدار بسته این را که شرط کافی پایداری نیست،

$$\sup_{\omega} |\Delta_m(j\omega)| \sup_{\omega} |H(j\omega)| < 1$$

اگر Δ_m پایدار باشد آن کمترین را داریم،

$$\sup_{\omega} |\Delta_m(j\omega)| \leq M$$

بنابراین سطح پایداری در توان کمتر $K(s)$ را داریم که مدول داشته باشد

$$\sup_{\omega} |H(j\omega)| < \frac{1}{M}$$

طبق تعریف نرم ∞ داریم :

$$\|H\|_{\infty} \cong \sup_{\omega} |H(j\omega)|$$

ماتریس پایداری معادله به این امتزجی می شود که یک کنترا پایداری کننده K را طوری بدست می آوریم که $\|H\|_{\infty}$ حداقل شود.

$$\|H\|_{\infty} = \|GK(I+GK)^{-1}\|_{\infty}$$

توجه کنید که $K=0$ باعث کم شدن یکت فدا شده در نتیجه اگر سیستم اصلی پایدار بوده هیچ فزاینده خرابی پایداری سیستم مطرح نباشد، طراحی اینکه آن است که هیچ فزاینده و حلقه انتقال نشود.

همین از معادله (I) معادلات نتیجه گرفت :

اگر تابع تبدیل $H(s)$ هر دو پایداری باشد، تابع تبدیل مدار مسبقه «پایدار معادله» است به شرط آنکه

$$|\Delta_m| < \frac{1}{|H(s)|}$$

با فاکتورین $H(s)$ داریم :

$$|\Delta_m| < \frac{1}{|GK(I+GK)^{-1}|} \quad (\text{رابطه II})$$

توجه کنید که خروجی است رات نام های فوق همان «متغیر حساسیت» یعنی $T(s)$ است. بنابراین شرط پایداری معادله آن است که :

$$|\Delta_m| < \frac{1}{|T|}$$

با توجه به اینکه عدم تطقت $\Delta_m(s)$ باید پایداری مدوله M باشد خواص معادلات :

$$|T| < \frac{1}{M} \quad \text{و} \quad |MT| < 1$$

برای پاسخ به سوال دوم بر این مبنی که در عدم تطقت که بحث پایداری سیستم مدار مسبقه

است رات رابطه II یعنی حداقل می شود که T ، حداکثر شود از طرفی بیشینه آن در محدوده فرکانس ها

(فرکانس طبعی ω_n) (resonant peak) است. (برای سیستم های رسته 2 ر یا سیستم های که مطب

غالب رسته دواشته باشند ضیق مدها وجود دارد)

28

$$| \Delta_m | < \frac{1}{|T|}$$

نیایدن:

کو فکتورین مدام قطبیت ناپایداری کنند در قطب ضرب را

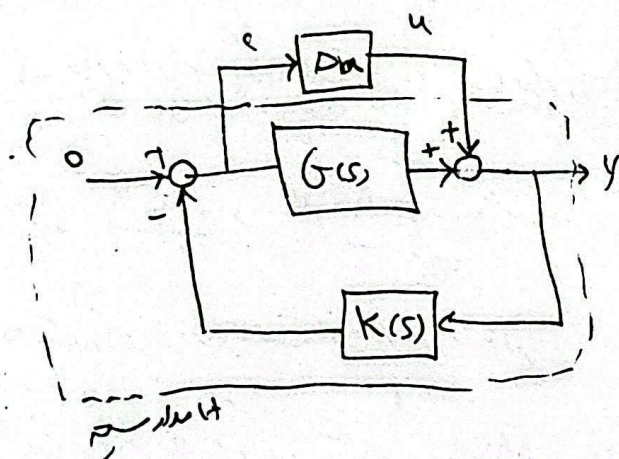
که آن M «م پایدار ضرب» $\left(\text{Multiplicative stability Margh} \right)$ MSM نامیده

$$MSM = \frac{1}{M_r} \quad , \quad M_r = \sup_{\omega} |T(j\omega)|$$

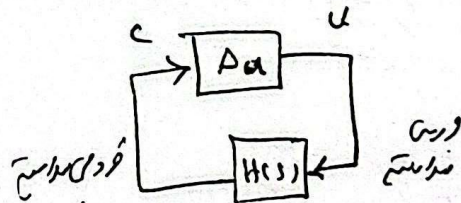
عبارت است از:

از آن می بینیم است M_r به مثابه نشانه در دینامیک باشد و می توان برای فرایع T که به بالا در نظر آید.

* بررسی شش پایدار و مقاوم نوع ج



در عدم قطبیت نوع ج داریم:



$$[C G(s) + U] K(s) = -C \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{U} = H(s) = -K(s) [I + G(s) K(s)]^{-1}$$

$$| \Delta_a(s) H(s) | < 1$$

$$| H(s) | | \Delta_a(s) | < 1$$

$$| \Delta_a | < \frac{1}{|K(I + G K)^{-1}|}$$

$$| \Delta_a | < \frac{1}{|K S(s)|}$$

به طبق قضیه کسین ها که می داریم:

با توجه به ترف حساسیت:

$| \Delta_a | < M$ اگر عدم قطبیت Δ_a پایدار مکرر M باشد، یعنی اگر داشته باشیم:

آنگاه:

$$|KS| < \frac{1}{\mu} \leq |KSM| < 1$$

خصوصی یاد آن در مورد که به بین عدم قطعیت ناپایداری که نگه در حالت جمع به صورت نوسان لال نمود.

که به بین عدم قطعیت ناپایداری که نگه در حالت جمع که اگر μ حد پایداری جمع μ Additive stability Margin

یا ASM نامیده عبارت است از:

$$ASM = \frac{1}{\sup_{\omega} |K(\omega)S(\omega)|}$$

با توجه به مطالب بیان شده می توان مولد زیر را نتیجه گیری نمود:

۱- برای اثرات حفاظت در برابر ناپایداری حاصل از عدم قطعیت نوع ضرب در نوع جمع به ترتیب

باید MSM و ASM بزرگ باشند زیرا این کمیت ها نشان دهنده حداقل مقدار عدم قطعیت

گرفته شده می توانند باشد ناپایداری شوند.

بنابراین هر چه کمیت های MSM و ASM بزرگ باشند به معنای آن است که سیستم مدار

چشمه به ازای عدم قطعیت های بزرگتری ناپایدار می شوند.

۲- به توجه به رابطه $MSM = \frac{1}{\mu_r}$ و $\mu_r = \sup_{\omega} |T(\omega)|$ ، اگر بزرگتر MSM بزرگ باشد باید

متن حساسیت یعنی $T(\omega)$ که یک درجه $K(\omega)$ که یک باشد.

۳- از طرفی کوک بودن $T(\omega)$ باعث نوسان افزایش می دهد که این عامل با قابلیت فرد

اثر اغتشاشات فردی و با تعقیب رفتار مطلب سیستم (حلقه) در تعداد است.

ج. - از دست های ۱ و ۲ فوق می توان نتیجه گرفت که مقایسه کوکد هر فیدبک (مقایسه کوکد هر، G_{KCS}) در فرکانس های بالا، سیستم مادر برابر عدم قطعیت های نفع ضرب - در این فرکانس ها مصنوعی ندهی دارد.

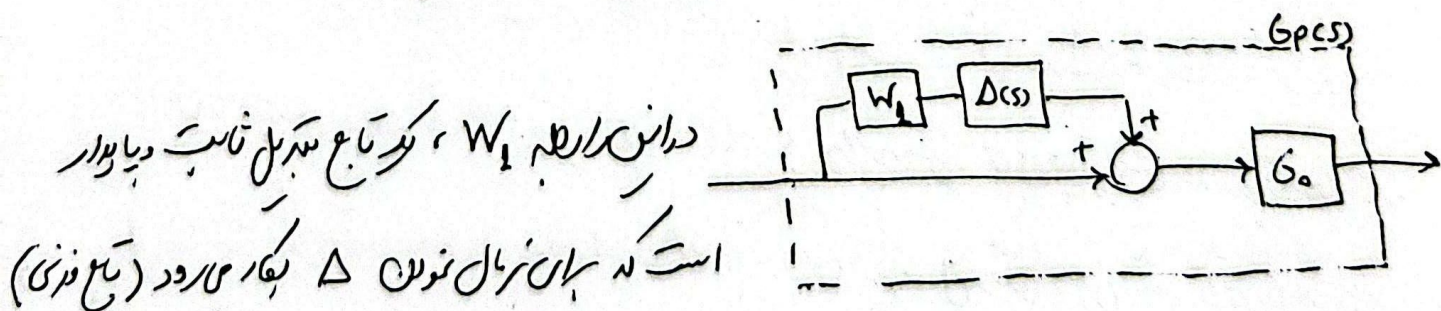
به عبارت دیگر، اگر هر فیدبک کوکد انتخاب شود، طرح نباید بزرگترین پایداری سیستم به خاطر عدم قطعیت سیستم در فرکانس های بالا باشد.

د. - در مورد عدم قطعیت های نوع جمع، باید ASR نزدیک به ۱ و این بدان معنی است که K_{CS} باید کوکد باشد. در این شرایط، محاسبات سیستم باید دقت کمتری داشته باشد.

← نامفید قابل توجه

رض کنند تابع تبدیل نام کوکد سیستم با عدم قطعیت نفع ضرب G_0 و تابع تبدیل سیستم اقلال باشد (Perturbed) آن G_p باشد. در این حالت اقلال نوع ضرب (Multiplicative perturbation) این سیستم

$$G_p = (1 + \Delta W_1) G_0 \quad \text{به صورت ریاضی خواص مورد (بنویسید)} \quad \Delta W_1$$



Δ کوکد تابع تبدیل پایدار متغیر یا نامفید است که نرم بنویس آن همواره کمتر از یک است

$$\| \Delta \| < 1$$

با این فرض هیچ مطلب ناپایداری از G در G صرف نشود است.

اگر بهشت این مدل نامی آن است که ΔW ، که (اندازه) سیستم نرالی شده حول خود است.

نیاز این اگر $\Delta W < 1$ باشد، مانند آن نیست،

$$\frac{G_P}{G_0} - 1 = \Delta W$$

در نتیجه به ازای تمامی فرکانس ها ضابطه ثابت است،

$$| \frac{G_P(\omega)}{G_0(\omega)} - 1 | < \Delta W$$

به صورتی که $| \Delta W |$ پهنای نامی را بیان می کند. این پهنای

این نامی که در دست در صفا مطلقا تا آن صفت برسد که در هر فرکانس، نقطه G_P/G_0 در

دستی به مرکز خود (1) دشوار $| \Delta W |$ قرار دارد.

• در عمل تابع $| \Delta W |$ که تابع آوازی است، زیرا سیموای نامی در سیستم های عملی با آوازی فرکانس،

آوازی می باید. دلیل استفاده از Δ نیز تقصیر فاز نامی و استفاده از آن به عنوان یک ضریب

مستقیم می دانند اقلال است. (به عنوان مثال Δ این در انفرم می کند)

* مثال: فرض کنید سیستم نامی دارای تابع تبدیل به صورت $G(s) = \frac{1}{s^2}$ باشد.

این تابع تبدیل می تواند مثالی از یک مسدود d.c. با میانی مسدود قابل چشم پوشی در نظر گرفته شود.

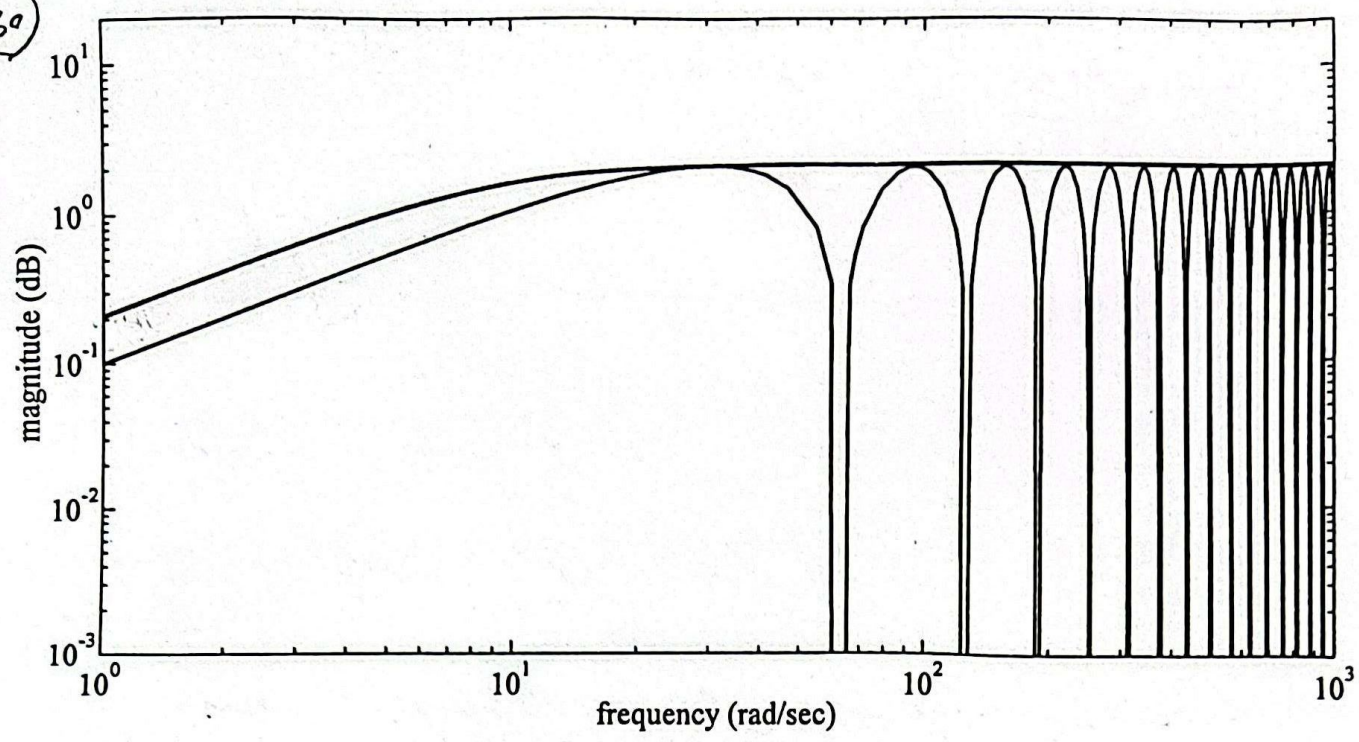
(با فرض اینکه در هر دو نقطه که فقط در این است) فرض کنید که در این سیستم دارای تابع تبدیل به صورت

$$G(s) = e^{-\tau s} \frac{1}{s^2}$$

باشد به صورتی که تاخیر آن تنها یک است من $\tau < 1$ باشد.

(به عبارت دیگر نامی در تاخیر نامی آن باشد)

30



تا فرکانس $e^{-\zeta}$ که در بسیاری از فرکانس‌های صاف می‌شود می‌تواند به صورت یک افتدال ضربی به همراه سیستم نامی در یک مرحله سیستم دی‌سی گنجانده شود به صورتی که داشته باشیم:

$$G_p = \{ (1 + \Delta \omega_2) G_0 : \|\Delta\|_\infty \leq 1 \}$$

برای پردازش این شرایط ω_2 باید به صورتی انتخاب شود که شرایط افتدال برآورده شود و هر دو برابر باشند

$$\Rightarrow \left| \frac{G_p(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 \right| < |\omega_2(j\omega)|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1 - e^{-\zeta}}{2} - 1 \right| < |\omega_2(j\omega)|$$

در شکل فوق با مشخص فرکانس $|1 - e^{-\zeta}|$ به این ا.م.ع نشان داده شده است.

(بهترین حالت)

در این صورت می‌توان تابع ω_2 را به صورت یک تابع تبدیل مرتبه اول، به شکل:

به عنوان کوکلیکین کران بالاها نامی استفاده نمود.

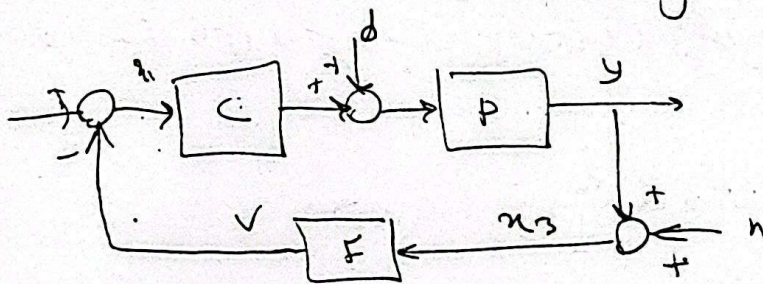
$$W_2(s) = \frac{0.21 s}{0.1 s + 1}$$

* کارهای مقادیر:

طبق تعریف، سیستم کاری مقادیر (Robust Performance) دلاکار دایمی و پاس باطل باشد و اهداف کاری برای کلیه مدل‌ها تعیین $P = G$ تعیین گردد.

به منظور استخراج معیار کاری، این بخش را با یک نمونه خاص از اهداف کاری (Performance)

و به عنوان مثال ردیابی (Asymptotic Tracking) شکل مرجع را بررسی می‌کنیم: برای سیستم داریم:



با فرض ردیابی $F=1$

اگر تابع تبدیل حلقه برای $L=PC$ باشد، آنگاه تابع تبدیل از ورودی (۲) به فضای ردیابی

(e) برابر با تابع صاف است خواه بود:

$$S = (1 + L)^{-1}$$

حال بر طبق قضیه مقداردهی ماکزیمال توانایی سیستم برای ردیابی سیگنال پله و شیب را داریم:

تعداد صفرهای S در $s=0$ است و قضیه موده استاندارد برای مورد همگرا است:

قضیه: فرض کنید سیستم پهنای بالا و پهنای پایین $n=1$ است حال:

• ضربه ورودی (۲) پله باشد پس پهنای بالا $t \rightarrow \infty$ فضای ردیابی $e(t) \rightarrow 0$ می‌کند
اگر S حداقل یک صفر در مبدأ داشته باشد.

(31) خط نه ورودی (۲) شیب باشد پس از گذشتن به خط حضور ریاضی $\rightarrow e(t)$ می رود
اگر S در اصل در صورت داده شده باشد.

ضمیمہ تحسینی برائے دیگر مہتممین تعلیم و ادب و غیر قابل انجام است۔ سرکاری منت دہ کاراں، خلاف اور اس میں بنی

کہ یہ دنبال کردہ سازش خفایاں حالت پدیدار ہو سکتی ہیں، یہ دنبال کردہ سازش خفایاں حالت پدیدار

در هر مورد حوالی میجوید این ائینستان ها مرجع هست. در کل معونه این احکام کارای با کتب جامع فوری با تمام حدود
به حدت کمی تصرف می شود

کرمی کفہ سیخ کتبی داری سحر بنیر داخل باشد سیخ تاج تبدیل از رسد (۲) به خودی (۱) کار

$$T = L(I + L)^{-1} \quad \therefore \quad \square$$

که این تابع تبدیل برابر با $\frac{1}{s}$ است. از طرفی از آن نشان دادیم که $\frac{1}{s}$ تبدیل P

همان تاج قدیم علی حسامی است :

$$\ln \frac{\Delta T/T}{\Delta P/P} = \frac{\delta T}{\delta P} \cdot \frac{P}{T} = S$$

$$\Delta p \rightarrow 0$$

بِقَوْصِ بَنَانِيهِ خُفَايِ مَانْدُكَ دَمِغِ حَلَقِ سَبْتِ تَرِ مَقَرِ رَتَبِ صَبْتِ رَا دُرُخَانِ صَفَرِ قَصَبِ كَنْدِ مَعْدِ كَارِ

نامی را به تو معرفی کرده است در و کائنات های مختلف می توان به هم نمود اگر این مقدار را باج حساب در

فواصلهای مختلف از بدنه در (۷) ع کوچه باشد درم -

$$|S(j\omega)| < \epsilon(\omega)$$

حاصل از تابع وزن $W_5(s) = \frac{1}{s}$ تعریف کرد، آنگاه متغیرات کلاسیک را توان به نرم به نظر

تابع سبیریل زیر تعریف نمود:

$$\|W_S S\|_2 < 1$$

مسائل دیگر می‌تواند از پاسخ سیستم نسبت به ورودی داده بررسی شوند:

$$\begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -PS & -S \\ -T & -CS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

حال مشخصات کارایی مختلف می‌تواند با استفاده از توابع وزنی مختلف بررسی توابع بالا به دست آید.
دانش چیست:

$$\begin{array}{ccc} \text{تابع وزنی } W_1 \text{ بررسی} & \longrightarrow & \text{تابع وزنی } W_1 P \\ PS & & S \text{ بررسی} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{تابع وزنی } W_2 \text{ بررسی} & \longrightarrow & \text{تابع وزنی } W_2 P \\ CS & & T \text{ بررسی} \\ (\text{بیشتر اینکه } CS = T/P) & & \end{array}$$

← در نتیجه مشخصات کارایی مرتبط با e مطلوب به تابع وزنی S وابسته است.

← مشخصات کارایی مرتبط با u مطلوب وابسته به تابع وزنی T خواهد بود.

لذا در صورت کارایی نامی مکرر اصل بررسی تابع وزنی می‌بایست $\|W_S S\|_1$ ترکیبی دیگر در نظر داشته باشد.

با توجه به معیار کارایی حلقه بسته $\|W_S S\|_1$:

$$\|W_S S\|_\infty < 1 \Rightarrow \left\| \frac{W_S}{1+2} \right\|_\infty < 1$$

حال چنانچه نامی مدل به عنوان مثال از نوع ضربی $G_P = (1+\Delta W)G$ باشد، خواصی داشت:

$$\left\| \frac{W_S}{1+(1+\Delta W)L} \right\|_\infty < 1 \Rightarrow \left\| \frac{W_1 S}{1+\Delta W_2 T} \right\|_\infty < 1$$

$$\begin{array}{l} W_1 = W_S \\ W_2 = \text{ضرب} \\ \text{در نظر} \end{array}$$

واقع است که برای کارایی معام برای سیستم حلقه بسته نامی توابع داریم:

$$\|W_2 T\|_\infty < 1 \quad \& \quad \left\| \frac{W_1 S}{1+\Delta W_2 T} \right\|_\infty < 1 \quad \forall \Delta$$

در نتیجه باید بررسی شود.

در این صورت کارایی مقادیر به صورت:

$$S \rightarrow \frac{|W_1(s) S(s)| + |W_2(s) T(s)|}{|W_1 S| + |W_2 T|}$$

$$|W_1 S| + |W_2 T|$$

که به صورت:

توی اکثر موارد لازم داریم برای شواهد کارایی مقادیر (Robust Performance) به صورت زیر است:

$$\| |W_1 S| + |W_2 T| \|_{\infty} < 1$$

برای اثبات می توان از معادله زیر استفاده کرد:

$$\| W_2 T \|_{\infty} \& \left\| \frac{W_1 S}{1 - |W_2 T|} \right\|_{\infty} < 1$$

برای گرفتن معادله Δ شد:

$$1 = |1 + \Delta W_2 T - \Delta W_2 T| \leq |1 + \Delta W_2 T| + |W_2 T|$$

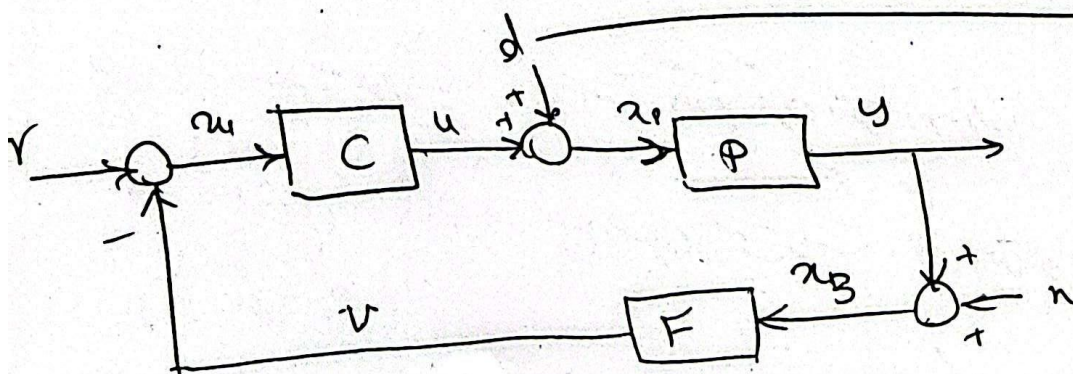
$$\Rightarrow 1 - |W_2 T| \leq |1 + \Delta W_2 T|$$

$$\left\| \frac{W_1 S}{1 - |W_2 T|} \right\|_{\infty} \geq \left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_{\infty}$$

در نتیجه ضرایب داشت:

$$\left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_{\infty} < 1 \quad \& \quad \| W_2 T \|_{\infty} < 1$$

★ شرط کارایی مقادیر



برای اینکه
کنترل مستقل
سیستم باشد
سیستم مستقیم
زیر است:

$$x_1 = r - F x_3$$

$$x_2 = d + C x_1$$

$$x_3 = n + P x_2$$

در شکل
ماتریس
خواص است

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

این سیستم یک سیستم خوش رفتار است اگر ماتریس 3×3 حاصل گین نبوده یا در شرایطی که در این حالت برابر با

است: $(1 + PCF)$ ، صفر نشود. حال اگر ماتریس 3×3 معکوس پذیر باشد.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -C & 1 & 0 \\ 0 & -P & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + PCF} \begin{bmatrix} 1 & -PF & -F \\ C & 1 & -CF \\ PC & P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

باقی به مفهوم پایدار بودن و اگر چه این تابع تبدیل به دست آمده یا پذیرا شده، سیستم پایدار داخل است.

این راه آسان برای تست پایداری داخل سیستم وجود دارد. اگر بتوان توابع تبدیل P ، C و F را به صورت کسری

صفر کسرها نسبت به هم اول (coprime polynomials) به صورت زیر نوشت:

$$P = \frac{N_P}{M_P}, \quad C = \frac{M_C}{N_C}, \quad F = \frac{M_F}{N_F}$$

آنکه صفر کسرها شش صفر سیستم پیچیده به دست زیر بیست می آید:

$$M_P + M_C M_F + N_P N_C N_F =$$

نتیجه 1: سیستم قطعه سیستم صحت داخل پایداری است اگر هیچ قطب صفر سیستم راست و محور صفر

صفر شکاف قرار نگیرد ($Re s > 0$).

نتیجه 2: سیستم پیچیده پایدار داخل است اگر تنها آردو شرط زیر برقرار باشد:

• تابع تبدیل $1 + PCF$ هیچ ضریب در سمت راست و بر محور صفر صفر شکاف نداشته باشد.

($Re s > 0$)

• هیچ گونه صفر قطب و منفرد در $Re s > 0$ در مقام شکنج حاصل ضرب PCF اتفاق نیفتد.

(33)

اثبات: ماتریس تابع تبدیل حلقه بسته - صورت زیر را داشته باشد:

$$\frac{1}{1+PFC} \begin{bmatrix} 1 & -PF & -F \\ C & 1 & -CF \\ PC & P & 1 \end{bmatrix}$$

و فرض می‌شود باید باشد.

فرض می‌شود سیستم فیدبک به صورت داخلی باید باشد. در این شرایط $(1+PFC)^{-1}$ باید باید باشد.

(که هیچ قطبی در $\Re s > 0$ نداشته باشد). بنابراین $(1+PFC)$ صفرهای قطبی نداشته و لذا شرط اول برقرار می‌شود.

با توجه به شرط دوم P, C, F به صورت جدایی‌ناپذیر به هم وصل در نظر گرفته می‌شوند.

$$P = \frac{N_P}{M_P}, \quad C = \frac{N_C}{M_C}, \quad F = \frac{N_F}{M_F}$$

با توجه به (۱)، تابع قطب ساده خواهد بود $N_P N_C N_F + M_P M_C M_F$

که صفر در $\Re s > 0$ ندارد. بنابراین هیچ‌گونه درجه‌های فیصله‌ای منفرجه قطب، صفر در $\Re s > 0$ نخواهند داشت.

$$-(M_P M_C M_F), (M_P M_C), (M_P M_F), (M_C M_F)$$

فرض کنید S_0 یک صفر از این شکله سیستم باشد در این صورت:

$$(N_P N_C N_F + M_P M_C M_F)(S_0) = 0$$

باید نشان دهیم که $S_0 \in \Re s > 0$ است که این با خواص قطب فیدبک را اثبات می‌کند.

با فرض عکس آن یعنی $S_0 \in \Re s < 0$ ، اگر:

$$(M_P M_C M_F) S_0 = 0$$

که این خلاف شرط اول است. $(N_P N_C N_F) S_0 = 0$

$$(M_P M_C M_F)(S_0) \neq 0$$

در این صورت می‌توان در جمله شکله هم به دست آورد.

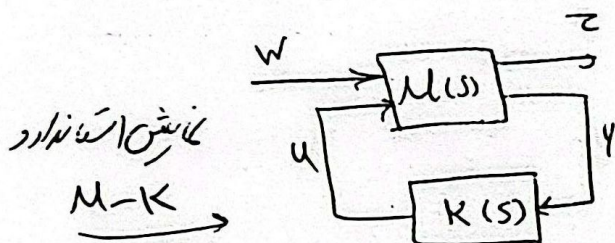
$$1 + \frac{N_p N_c N_F}{M_p M_c M_f} (s_0) = 0$$

که داریم:

$$1 + PCF(s_0) = 0 \rightarrow \text{که شرط ایل ماتنقی می باشد}$$

★ یکپاره نویسی استاندارد در مسایل کنترل معام

یکپاره نویسی سیستم به منظور تحلیل و طراحی مسایل کنترل معام مورد استفاده قرار می گیرد. شکل زیر در نظر بگیرید.



که در آن K به گونه ای از سیستم M استخراج شده که سیگنال های ورودی - خروجی آن عبارت باشد از:

● $W(s)$ ورودی های بیرونی (exogenous inputs): این نوع ورودی ها قابل کنترل نبوده، از نوع اغتشاش،

توربین، سیرمطلب، زلزله و... می باشد.

● $M(s)$ یا ورودی های کنترلی (Manipulated inputs): این ورودی ها تلاش کنترلی را سازند که توسط کنترلر ایمن شود.

● $Z(s)$ یا خروجی های تنظیم کننده (tunable outputs): این نوع خروجی از مدلهای بهینه سازی معینه سیستم تعاریف می شود. شده اند که تا حد ممکن باید کوچک شوند.

● $Y(s)$ یا خروجی های اندازه گیری شده (measured outputs): خروجی های اندازه گیری شده در سیستم پیچیده است.

تفسیر این نوع ها را باید به تعریف خروجی های تنظیم کننده Z باید صحیح کرد. بر خلاف سیستم های عادی که در

مقادیر خروجی Y را اندازه گیری شده و در پیوسته استفاده می شوند، در M معمولاً تنظیم خروجی های در نظر گرفته که

در بهینه سازی هزینه مستقیم مورد استفاده قرار می گیرند.

به عنوان مثال اگر روی هدف اصلی سیستم باشد، خطای ردیابی $z_1 = y_1 - l_1$ به عنوان اولین مولفه بردار خروجی تنظیم شود که می تواند در نظر گرفته شود. حال اگر بتوان اهداف دیگر مورد نظر در طراحی بهینه را به صورت سلفه های دیگر این بردار در نظر گرفت و روش در نظر گرفت که بتوان این بردار را به مقدار صفر تنظیم نمود و مصالحی بین اهداف کنونی مختلف در ساله عمومی تنظیم انجام شده است.

با توجه به شکل نمایشی استاندارد $M-K$ داریم:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11}(s) & \mu_{12}(s) \\ \mu_{21}(s) & \mu_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

در فرضیه $u = Ky$ ، با سبب رابطه بالا و رد کردن رابطه کنونی می توانیم داشته باشیم:

$$y = \mu_{21} w + \mu_{22} u$$

$$y = \mu_{21} w + \mu_{22} Ky$$

$$(I - \mu_{22} K) y = \mu_{21} w$$

$$\Rightarrow y = (I - \mu_{22} K)^{-1} \mu_{21} w$$

پس می توان u را به صورت $u = Ky$ نوشت.

$$u = K(I - \mu_{22} K)^{-1} \mu_{21} w$$

$$z = \mu_{11} w + \mu_{12} u$$

از طرفی،

با جایگزینی u به معنی در آن:

$$z = (\mu_{11} + \mu_{12} K(I - \mu_{22} K)^{-1} \mu_{21}) w$$

پس می توان عبارت زیر را تعریف نمود:

$$T_{zw} = F_1(M, K) = \mu_{11} + \mu_{12} K(I - \mu_{22} K)^{-1} \mu_{21}$$

$$z = F_2(M, K) w$$

اصطلاحاً به تابع تبدیل F تبدیل کسری خطی (Linear Fractional Transformation) و LFT از M و K گفته می‌شود.

میشود به این دلیل که طبقه بندی M با بلوک K (که نامیده شده است) این نوع از تبدیل کسری خطی را می‌سازد. (Lower LFT) و LLFT نیز نمونه‌های خاص از $F(M, K)$ هستند.

همچنین به $M(s)$ سیستم ترکیبی یا فیلد (Generalized plant) و سیستم متصل شده (Interconnected System) گفته می‌شود.

از رابطه بین سلفه‌های M با تریس‌های A و B و C و D که سیستم را توصیف می‌کند عبارت زیرات را

$$\dot{x}(t) = A x + B_1 w(t) + B_2 u(t)$$

$$z(t) = C_1 x + D_{11} w(t) + D_{12} u(t)$$

$$y(t) = C_2 x + D_{21} w(t) + D_{22} u(t)$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = C_1 (sI - A)^{-1} B_1 + D_{11}$$

← تابع تبدیل w به z :

$$M_{12} = C_1 (sI - A)^{-1} B_2 + D_{12}$$

← تابع تبدیل u به z :

$$M_{21} = C_2 (sI - A)^{-1} B_1 + D_{21}$$

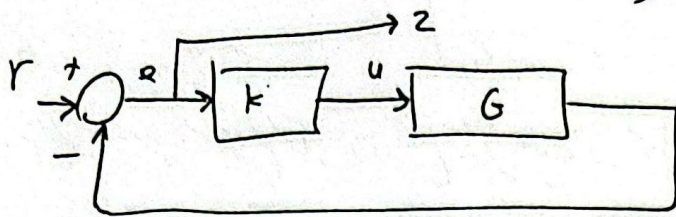
← تابع تبدیل w به y :

$$M_{22} = C_2 (sI - A)^{-1} B_2 + D_{22}$$

← تابع تبدیل u به y :

(39)

مثال اول: شکل زیر را مقرر کنید و آن را به شکل یک سیستم استاندارد در آورید. سپس تابع تبدیل سیستم از u به z استخراج کنید.



$$W = r$$

$$u = u$$

در این سیستم فرض بر آن است که ورودی

وارد به سیستم r و در این شکل u است:

تخمینی خردی مطلق به سیستم e نموده که منجر به کنترل خردی و در نتیجه z می شود.

$$z = e, \quad y = e$$

$$G = C(SI - A)^{-1}B + D$$

تابع تبدیل سیستم G برابر است با:

این را با روش فضا حالت و تابع تبدیل حل می کرد.

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$z = -Cx(t) + r - Du(t) = e(t)$$

$$y = -Cx(t) + r - Du(t) = e(t)$$

الف) روش فضا حالت:

$$\Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -C & I & -D \\ -C & I & -D \end{bmatrix}$$

ب) روش تابع تبدیل: در این روش هر بلوکی از ورودی های وارد به سیستم مورد نظر گرفته شده، توابع تبدیل

سیستم می شود. پس اگر ورودی u گرفته شود و آن به تابع تبدیل سیستم حلقه u برابر است با:

$$M_{11} = I \quad \text{ب) برابر است با:}$$

$$M_{21} = I \quad \text{ب) برابر است با:}$$

همچنین چنانچه ورودی سیستم از ورودی u مورد نظر گرفته شود، آن به تابع تبدیل سیستم حلقه u برابر است با:

$$M_{12} = -G \quad \text{ب) برابر است با:}$$

$$M_{22} = -G \quad \text{ب) برابر است با:}$$

سیس تابع تبدیل استاندارد این رابطه با جایگزینی مقادیر M بدست می آید:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -G \\ I & -G \end{bmatrix}$$

بر طبق رابطه استخراج کرده برای تابع تبدیل سیستم از w به z خواهیم داشت:

$$z = M_{11} + M_{12} K (I - M_{21} K)^{-1} M_{21}$$

$$= (I + GK)^{-1} w$$

معمولاً در این نوع مسئله e و u در تابع زنی w ضرب می گرد تا مقادیر بدست آید که در سامانه وارد می شود.

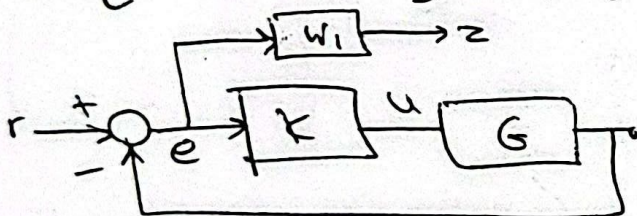
$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1 G \\ I & -G \end{bmatrix}$$

بر این اساس:

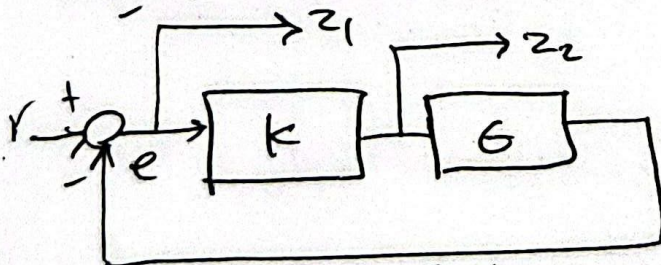
بر این تریس M و حساسیت (Sensitivity Problem) تعیین می شود که هدف در این مسئله تعیین تابع تبدیل

$$\min_k [W_1 (I + GK)^{-1}] = \min_k [W_1 S]$$

سیستم از w به z است.



مثال هم در شکل زیر یک نمونه از استاندارد برای کنترل را بدست آورده. سسین تابع تبدیل سیستم از w به z را استخراج کنه.



$$w = r$$

$$u = u$$

همچنین خروجی مطلوب سیستم در شکل e و u است در حالی که سسینال خارجی سیستم که مورد استفاده کنترل کننده واقع می شود، e است.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} \quad y = e$$

(36)

$$G = C(SI - A)^{-1}B + D$$

در این صورت تابع تبدیل

است (از این تعریف حالت: جفتی ورودی و خروجی همان توابعی برای این است که در تکرار M به صورت زیر بیان

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

هر فرضی که می شود

$$I_1 = -Cx(t) + r - Du(t) = e(t)$$

$$y(t) = -Cx(t) + r - Du(t) = e(t)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -C & I & -D \\ -C & I & -D \end{bmatrix}$$

$$9 \quad \dot{x}_2(t) = Ax_2(t) + Bu_2(t)$$

$$z_2 = u_2(t)$$

$$y_2(t) = -Cx_2(t) + r - Du_2(t) = e(t)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 0 & I \\ -C & I & -D \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ [-C] & [I] & [-D] \\ -C & I & -D \end{bmatrix}$$

ب) از این تابع تبدیل: در این روش هم به یکی از ورودی ها وارد بر سیستم میفرستیم نظر گرفته شده تابع های تبدیل سیستمی می شود پس اگر ورودی سیستم از تکرار M میفرستیم نظر گرفته شود آنکاه تابع تبدیل سیستم حل می شود باز برابر است با:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bullet \quad \text{تابع تبدیل از } w \text{ به } z \text{ برابر است با}$$

$$M_{21} = I \quad \bullet \quad \text{تابع تبدیل از } w \text{ به } y \text{ برابر است با}$$

همچنین چنانچه ورودی سیستم از ورودی w میفرستیم نظر گرفته شود آنکاه تابع تبدیل سیستم حل می شود باز برابر است با:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} -G \\ I \end{bmatrix} \quad \bullet \quad \text{تابع تبدیل از } u \text{ به } z \text{ برابر است با}$$

$$M_{22} = -G \quad \bullet \quad \text{تابع تبدیل از } u \text{ به } y \text{ برابر است با}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

پس تابع تبدیل است که در این رابطه با یکدیگر می مقایسه می شود

$$M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G \\ I \end{bmatrix} \\ I & -G \end{bmatrix}$$

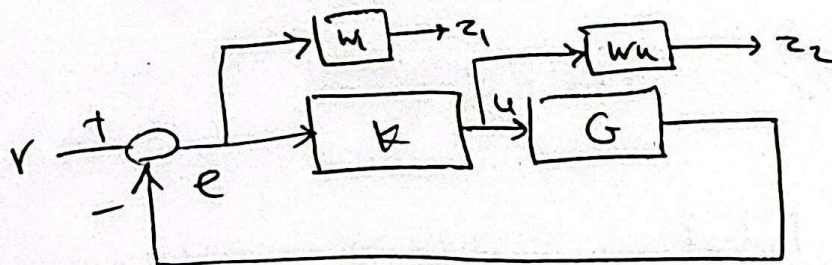
در اینجا $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = (M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21})w$

$$= \begin{bmatrix} (I + GK)^{-1} \\ K(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} w$$

معمولاً در این نوع مسائل هدف شنیدل e و u به ترتیب در توابع هزینه w_1 و w_2 قرار می‌دهند و به دنبال بهینه‌سازی آن‌ها هستیم. این کار در مسائل ریاضی و به کمک اثری که در این حالت داریم می‌توانیم به بهینه‌سازی آن‌ها بپردازیم.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -w_1 G \\ w_2 \end{bmatrix} \\ I & -G \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \min_K \begin{bmatrix} w_1 (I + GK)^{-1} \\ w_2 K (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} = \min_K \begin{bmatrix} w_1 S \\ w_2 KS \end{bmatrix}$$



مثال دوم: شکل زیر را در نظر گرفته z را به شکل یک بردار می‌بینیم و به دنبال بهینه‌سازی آن هستیم.

به سبب تابع تبدیل سیستم از w به z را استخراج کنید.

$$w \leq v, \quad u \leq u$$

همچنین e و u و y به عنوان زوای در تقویم گرفته می‌شوند.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ u \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad y = e$$

(3x)

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

الف) رشتن فضای حالت:

$$z_3 = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = r - Cx(t) - Du(t) = e(t)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ C & 0 & D \\ -C & I & -D \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ c_1 & p_{11} & p_{12} \\ G_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -C & I & -D \\ 0 & 0 & 0 \\ -C & I & -D \end{bmatrix}$$

— ارزشی تابع تبدیل: در این روش در هر دو ورودی و خروجی یک تغییرات اعمال می شود، و به این تغییرات تبدیل می شوند.

• تابع تبدیل از W به Z برابر است با: $M_{11} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• تابع تبدیل از W به Y برابر است با: $M_{12} = I$

همچنین تابع تبدیل از U به Y و U به Z نیز برابر است با:

• تابع تبدیل از U به Z برابر است با: $M_{21} = \begin{bmatrix} -G \\ I \\ G \end{bmatrix}$

• تابع تبدیل از U به Y برابر است با: $M_{22} = -G$

دستیابی

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G \\ I \\ G \end{bmatrix} \\ I & -G \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = (M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21})W$$

$$= \begin{bmatrix} (I + GK)^{-1} \\ K(I + GK)^{-1} \\ GK(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} W$$

در این نوع مسئله سیگنال های e , u , z به ترتیب در توابع وزنی w_1 , w_u و w_2

ضرب می گردند و حاصل این ضرب است آید که در مسئله بررسی رویایی، معیار انرژی، و هم وزن را

خود می گویند. در این صورت:

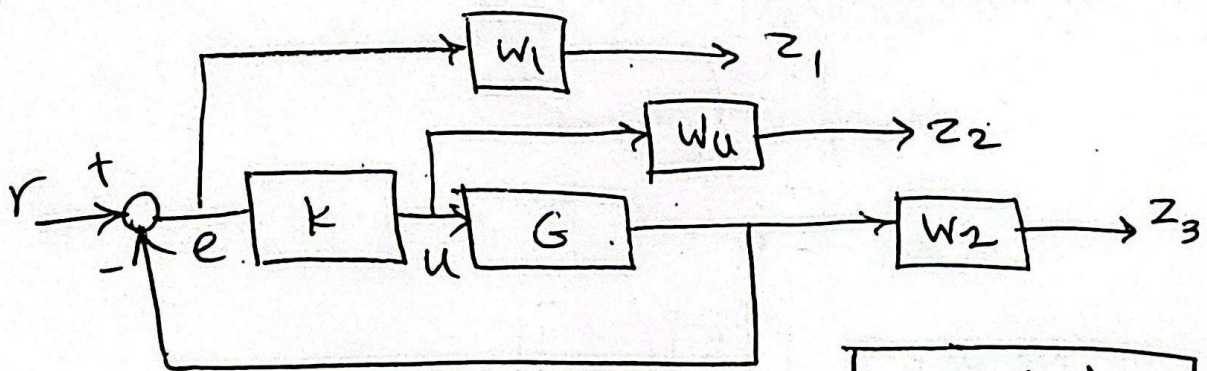
$$M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -w_1 G \\ w_u \\ w_2 G \end{bmatrix} \\ I & -G \end{bmatrix}$$

با این ترتیب M مسئله عمومی حساسیت مخلوط (General mixed sensitivity problem) تبدیل می گردد که

در این مسئله ای در مسئله مناسب بین پدیده های معادله، که در این مسئله در حلقه باز

در عملیات:

$$\min_k \begin{bmatrix} w_1 (I + GK)^{-1} \\ w_u K (I + GK)^{-1} \\ w_2 GK (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} = \min_k \begin{bmatrix} w_1 S \\ w_u K S \\ w_2 T \end{bmatrix}$$



این بهترین نوع مقدار طراحی می شود

با این مقدار در مقابل می توان از دستور w استفاده نمود

$$P = \text{aug}(G, w_1, w_u, w_2)$$

وزن سیگنال ورودی
وزن سیگنال خروجی
وزن سیگنال ورودی
وزن سیگنال خروجی

38

$$G(s) = \frac{400}{s^2 + 52s + 900} \quad W_1 = \frac{100(0.25s+1)^2}{(0.25s+1)^2} \quad W_u = u_{\text{non}}$$

$$W_2 = \frac{s^2}{40000}$$

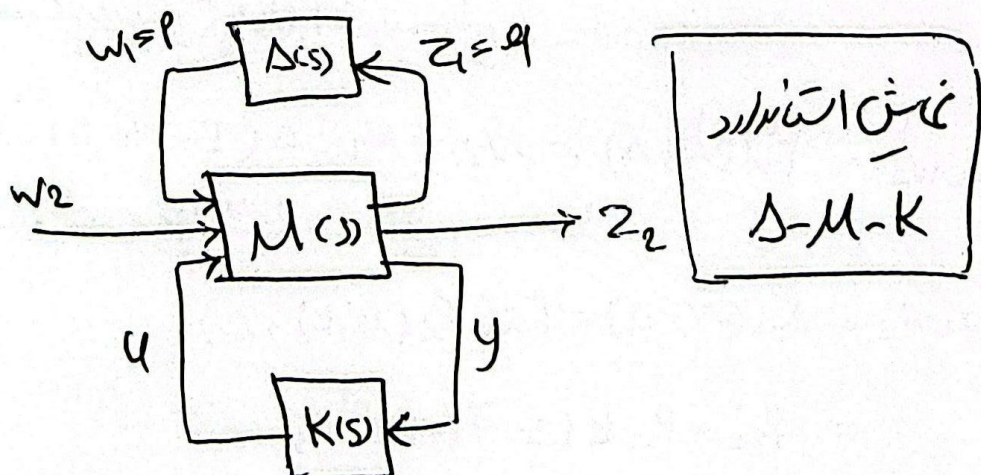
فرقی

* پیکره‌پذیری استاندارد جامع در تحلیل و طراحی کنترل مقدم:

در پیکره‌پذیری استاندارد برای طراحی مسائل کنترل مقدم، تکرار از سیستم (دینامیک) های غیر آشفته، فرم‌های استاندارد، نامفید، ساده دینامیک سیستم وجود داشته باشد، اگرچه سفیدهای انحصاری توانست وارد سیستم شوند. در پیکره‌پذیری استاندارد جامع، نامفیدهای کنترل کننده از سیستم (دینامیک) های غیر آشفته به گونه‌ای که پاسخ تبدیل W_2 به Z_2 بی $T_{Z_2 W_2}$ شوند.

از پاسخ تبدیل $T_{Z_2 W}$ باید فرض $(W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, u)$ در فرم $(y, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix})$ که به تکرار شدن سیستم کنترل از سیستم های نامفید است شروع می‌کنیم. پس از پیکره‌پذیری استاندارد حاصل طراحی کنترل مقدم را به زیرمجموعه‌هاست:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad u = Ky$$



$$T_{ZW} = F_e(M, K) = M_{11} + M_{12} K (I - M_{22} K)^{-1} M_{21}$$

(UFT) تبدیل کسری خطی

باقی به اینکه این هر یک از ورودی و خروجی های w یک سطح انتفاقی هستند، پس می توانیم μ را به شکل زیر اصلاح می کرد:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \sim & P_{13} \\ P_{21} & \sim & & P_{23} \\ P_{31} & \sim & \sim & P_{33} \end{bmatrix}$$

نکته اول: داشت

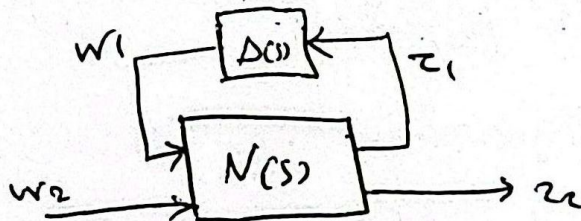
$$T_{2w} = F_y(\mu, k) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \end{bmatrix} k (I - P_{33} k)^{-1} \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} \end{bmatrix}$$

و نکته دوم: داشته بودیم

$$T_{2w} = F_L(\mu, k)$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11} + P_{13} k (I - P_{33} k)^{-1} P_{31} & P_{12} + P_{13} k (I - P_{33} k)^{-1} P_{32} \\ P_{21} + P_{23} k (I - P_{33} k)^{-1} P_{31} & P_{22} + P_{23} k (I - P_{33} k)^{-1} P_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$



حال دو ورودی (w_1, w_2) در دو خروجی (z_1, z_2) از یکدیگر جدا کردیم، پس از w_2 به z_2 می رسد. می شود به این منظور از رابطه ULFT استفاده کنیم.

$$T_{z_2 w_2} = F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21} \Delta (I - N_{11} \Delta)^{-1} N_{12}$$

پس با جایگزینی مدلهای فوقه داشتیم:

$$T_{z_2 w_2} = F_u(N, \Delta) = F_u(F_L(\mu, k), \Delta)$$

$$= P_{22} + P_{23} k (I - P_{33} k)^{-1} P_{32} +$$

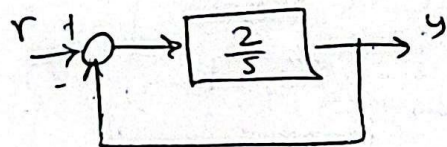
$$\left(P_{21} + P_{23} k (I - P_{33} k)^{-1} P_{31} \right) \Delta \left(I - \left(P_{11} + P_{13} k (I - P_{33} k)^{-1} P_{31} \right) \Delta \right)^{-1}$$

$$\times \left(P_{12} + P_{13} k (I - P_{33} k)^{-1} P_{32} \right)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & w_2 G \\ w_e w_1 & w_e w_d & 0 & w_e G \\ \hline -w_1 & -w_d & I & -G \end{array} \right]$$

فصل ۱) سیم‌زیر در نظر گرفته، 0 را به شکل زیر در آورده:



$r = \text{ic signal}(1);$

$e = \text{ic signal}(1);$

$y = \text{ic signal}(1);$

$M = \text{'connect'}$;

حل: این سیستم را به دست آورده، ic signal را عیناً می‌نویسد:

سیگنال‌های زیر را به دست آورده، connect را می‌نویسد:

$M.\text{input} = r;$

ورس دیگری که M می‌نویسد:

$M.\text{output} = [e; y];$

$M.\text{Equation}\{1\} = \text{equate}(e, r - y)$ سیگنال‌ها را به هم می‌نویسد:

$M.\text{Equation}\{2\} = \text{equate}(y, \text{tf}(2, [1 \ 0]) * e);$

$\text{tf}(M.\text{System})$

Transfer function from input to output:

در نتیجه:

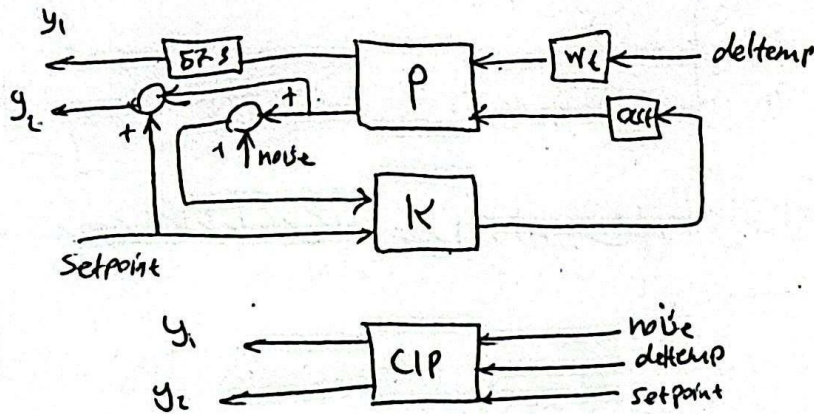
#1 $\frac{s}{s+2}$

#2 $\frac{2}{s+2}$

(49)

شکل: شطرنجی زیر را و نظر گرفته ده رکنه

شکل A به شکل استاندارد B در آوریم



دنگواه آبی
شوند

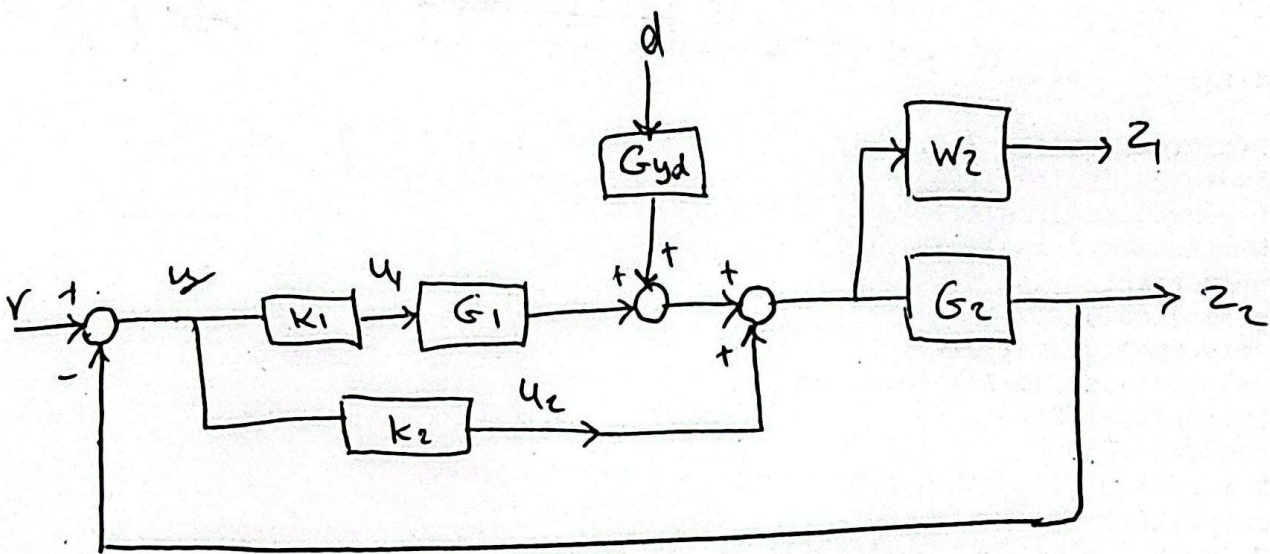
```
clear
clc
P=minreal(tf(rss(3,2,2)));
K=minreal(tf(rss(1,1,2)));
A=minreal(tf(rss(1,1,1)));
W=minreal(tf(rss(1,1,1)));
M=iconnect;
noise=icsignal(1);
deltemp=icsignal(1);
setpoint=icsignal(1);
yp=icsignal(2);
rad2deg=57.3;
M.Equation{1}=equate(yp,P*[W*deltemp; A*K*[noise+yp(2);
setpoint]]);
M.Input=[noise;deltemp;setpoint];
M.Output=[rad2deg*yp(1); setpoint-yp(2)];
T=tf(M.System)
```

```
clear
clc
P=minreal(tf(rss(3,2,2)));
K=minreal(tf(rss(1,1,2)));
A=minreal(tf(rss(1,1,1)));
W=minreal(tf(rss(1,1,1)));
systemnames='W A K P';
inputvar='[noise;deltemp;setpoint]';
outputvar='[57.3*P(1);setpoint-P(2)]';
input_to_W='[deltemp]';
input_to_A='[K]';
input_to_K='[P(2)+noise;setpoint]';
input_to_P='[W;A]';
cleanupysic='yes';
T=tf(sysic)
```

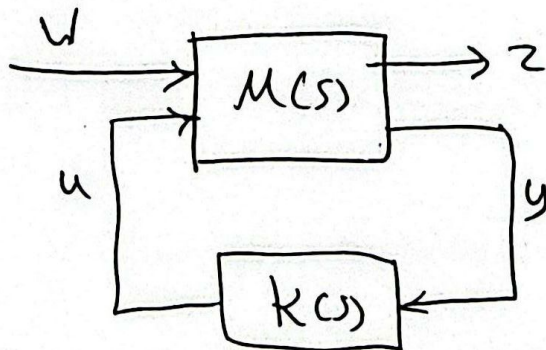

نکته: رابطه برادر تعریف شده

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} r \\ d \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

الف: ماتریس P را بر اساس پیکربندی استاندارد و منطقی شکل نظام به دست آورید:

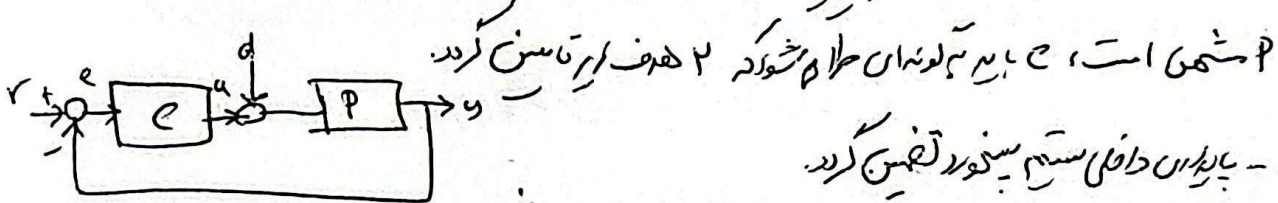


ب) مدلهای ماتریس M (رانش استاندارد $M-K$) را به دست آورید.



ایجاد سیستم های کنترل مقاوم

سیستم کنترل باز خد برادرتنم لکیده که P ، دیکه سیج لکیده و C دیکه لکیده سده، لکیده سده است. با توجه به اینکه



P مشخص است، C باید تعیین شود تا y هدف را دنبال کند.

۱- پایداری داخلی سیستم پیچیده تر تعیین کرد.

۲- ویژگی مطلوب مانند ردیابی و حذف نویز را در C تعیین شود.

یکی از راه های طراحی کنترل کننده C ، تجزیه پارامتر (Parameterization) گامی کنده های C است که سیستم را Prime factorization

ارائه شده به تجزیه پارامتر C پیچیده تر است:

* تجزیه پارامتر های کنده: سیستم پایداری

فرض کنه P پایداری سده است، دایره C شکل کنده های C که این سیستم را پایداری کنده

صحت قضیه زیر قابل استخراج است:

← قضیه: اگر P تابع تبدیل پایداری و لکیده سده باشد، آنجا تجزیه های کنده های C که

سیستم پیچیده نشان داده شده شکل C پایداری داخلی سده است و بر تعیین می شود:

$$\left\{ C = \frac{Q}{1 - PQ}, Q \in RH_{\infty} \right\} \quad (\text{اشاف به عده دانشجو})$$

با توجه به شکل
سیستم حساسیت
حساسیت

$$S = \frac{1}{1 + PC} \Rightarrow S = 1 - PQ$$

$$T = \frac{PC}{1 + PC} \Rightarrow T = PQ$$

درست هم مربوط به شرطی که در عنوان نوشته شده و در این مسئله r در صورتی که $\sum$ داریم حاصل می شود در صورتی که $\lim_{t \rightarrow \infty} t$ ، به گذشت اصل وحدت

$$S(s) = 1 - P(s)Q(s) = 0 \Rightarrow P(s) \cdot Q(s) = 1$$

آرمانی را به $P(s) \neq 0$ باشد، آنجا لازم است که

$$Q(s) = \frac{1}{P(s)}$$

به این ترتیب به انتی ب تناسب $Q \in RH^\infty$ ارضای زیرین هم موجود است شرط پایدار بودن را می توانیم

حاصل کنیم، معادل آن که C را تعریف نمود.

در نتیجه برای کنترل کننده باید ساز که شرط درجی خطی ملکه و همواره در این پله را تعریف نمود.

$$\left\{ C(s) = \frac{Q}{1 - PQ}, \quad Q \in RH^\infty, \quad Q(s) = \frac{1}{P(s)} \right\}$$

مثال: برای سیستم زیر کنترل کننده ای طراحی کنید که سیستم حلقه بسته پایدار شود و خطای حالت ملکه

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

نسبت به وزن شیب در آن صفر رود.

از این بی (ش) را به تابع تبدیل $Q \in RH^\infty$ به عنوان مثال تابع به زیر Q را در نظر بگیرید.

$$Q = \frac{as+b}{s+1}$$

در این صورت داریم:

$$S = 1 - PQ = 1 - \frac{as+b}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{s^3 + 4s^2 + (5-a)s + (2-b)}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$\text{شرط کای: } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \times \frac{1}{s^2} = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(s)}{s} = 0$$

$$5-a=0 \Rightarrow a=5$$

$$2-b=0 \Rightarrow b=2$$

به این معنی است که

(42)

$$Q = \frac{5s+2}{s+1}$$

لذا Q فاصله شده

$$c = \frac{Q}{1-pQ}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{(5s+2)(s+1)(s+2)}{s^2(s+4)}$$

نکته: اگر از نوع دو (type 2)، دارای دو قطب در مبدأ می باشد.

* سیستم های نیلیدار و فاصله های به هم اول:

داشتن تمسک رضی شود که Q تا پایدار است و به دنبال کنترل سیستم کرب می باشد خاص سیستم پیچیده را می باشد

$$nu + mv = 1$$

 n, m نسبت به هم اول هستند.برای این اتحاد برد
Identity Bezout

آلگوریتم اقلیدس:

(Euclid's Algorithm)

به منظور یافتن ضریب های هم اول هر دو ضریب همی از دخی، با الگوریتم معروف به اقلیدس

استفاده می شوند. داشتن الگوریتم و به منظور یافتن ضریب های هم اول n و m حاصل از برابلی می باشد.موردی ها: در ضریب های n و m را در یافت شد.مقدار m را در: اگر $\text{degree}(m) > \text{degree}(n)$ به ترتیب جای ضریب های n و m را عوض می کنیم.• گام اول: ضریب های n را بر m تقسیم کرده و خارج قسمت q_1 و باقی مانده r_1 را به دست آوریم،

$$n = mq_1 + r_1 \quad \text{degree}(r_1) < \text{degree}(m)$$

• گام دوم: ضریب های خارج قسمت m را بر ضریب های باقی مانده r_1 تقسیم و خارج قسمت q_2 و باقی مانده r_2 را به دست آوریم.

$$m = r_1 q_2 + r_2$$

$$\text{degree}(r_2) < \text{degree}(r_1)$$

• گام سوم: ضریب های r_1 را بر r_2 تقسیم و خارج قسمت q_3 و باقی مانده r_3 را به دست آوریم.

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

$$\text{degree}(r_3) < \text{degree}(r_2)$$

• کام این فرایند را کامرته (داده دهی) تا به مقدار ثابت غیر صفر r_k برسد
 • کام آخری مقدار صفر را تشکیل دهد: (مثلاً $k=4$)

$$\begin{cases} n = m q_1 + r_1 \\ m = r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & 1 & 0 \\ -1 & q_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q_1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

اگر این معادله را از r_3 حل شود:

$$r_3 = (1 + q_2 q_3) n + [-q_3 - q_1 (1 + q_2 q_3)] m$$

با توجه به اینکه $r_3 \neq 0$ است فراهم داشت:

$$u = \frac{1}{r_3} (1 + q_2 q_3)$$

$$v = \frac{1}{r_3} [-q_3 - q_1 (1 + q_2 q_3)]$$

به این ترتیب ضرایب u, v, m, n را می توان
 نزد $nu + mv = 1$ با فرض صحت

$$m(s) = 6s^2 - 5s + 1$$

$$n(s) = s^2$$

کمترین:
 طبق کام اولی در این:

$$q_1 = \frac{1}{6}, r_1 = \frac{5}{6}s - \frac{1}{6}$$

$$q_2 = \frac{36}{5}s - \frac{114}{26}, r_2 = \frac{6}{26}$$

چون مقدار r_2 ثابت غیر صفر است پس آنرا به صورت r_2 باقی مانده در فرایند تشکیل می دهیم.

$$\begin{cases} n = m q_1 + r_1 \\ m = r_1 q_2 + r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

از r_2 حل شود:

$$r_2 = (1 + q_1 q_2) m - q_2 n$$

لذا فراهم داشت:

$$u = -\frac{q_2}{r_2} = -30.8 + 19$$

$$v = \frac{1 + q_1 q_2}{r_2} = 5s + 1$$

(43) با جایگزینی پاسخ‌های بدست آمده در اتحاد بزرگ می‌توان برابری این اتحاد را راست آزمایی کرد:

$$(-30s+19)s^2 + (5s+1)(6s^2-5s+1)=1$$

* توابع تبدیل نسبت به هم اول

مفهوم ضدهای هم اول قبل از بحث به توابع تبدیل به هم اول است. بدین شکل تابع تبدیل $G(s)$ را می‌توان به دو تابع تبدیل $N(s)$ و $M(s)$ و تابع تبدیل $C(s)$ که برابری در تابع تبدیل پذیرد کرد، $U(s)$ و $V(s)$ نوشته شود، باشد را در نظر بگیریم:

$$G(s) = \frac{N(s)}{M(s)}, \quad C(s) = \frac{U(s)}{V(s)}$$

اگر این دو تابع در اتحاد پخته صدق کنند:

$$N(s) \cdot U(s) + M(s) \cdot V(s) = 1$$

آنگاه توابع تبدیل $N(s)$ و $M(s)$ نسبت به هم اول بود و توابع تبدیل $U(s)$ و $V(s)$ نیز نسبت به هم اول است. که اصطلاحاً به توابع $N(s)$ و $M(s)$ فاکتورهای هم اول ($\text{Coprime Factorization}$) گفته می‌شود. باید توجه داشت که برابری این اتحاد، هیچ‌یک از توابع تبدیل نباید صفر مگرگی در سمت راست معادله نخواهد داشت و بنویسده باشند. زیرا در غیر این صورت:

$$N(s_0) \cdot U(s_0) + M(s_0) \cdot V(s_0) = 0 \neq 1$$

← اگر تقسیم ضدهای هم اول توابع تبدیل:

و در تابع تبدیل $G(s)$ را در دست کنید:

• هم اول را اگر می‌توانید راست پس به شکل زیر بکشید:

$$N(s) = G, \quad M(s) = 1, \quad U(s) = 0, \quad V(s) = 1$$

در غیر این صورت به روش هم برابر:

• هم اول و تابع تبدیل $G(s)$ را به تفکیک متغیر $s = \frac{1-s'}{s'}$ به صورت $G(s')$ در بیابید:

← (توجه کنید که این تغییر متغیر یک نسبت است)

سپس آن را به صورت چند جمله‌ای نسبت به s درج اول مرتبه می‌نویسیم:

$$G(s') = \frac{n(s')}{m(s')}$$

مثال ۱: از کدورتی آفلاین استفاده کردیم، $u(s)$ و $v(s)$ را به این ترتیب می‌نویسیم:

$$n(s') u(s') + m(s') v(s') = 1$$

مثال ۲: در حالت $n(s)$ ، $m(s)$ و $u(s)$ را با تغییر متغیر $s' = \frac{1}{s+1}$ به صورت

$$N(s'), U(s'), V(s'), M(s')$$

مثال: برای استخراج تبدیل $G(s)$ ، فیلترهای هم‌اثر $U(s)$ و $V(s)$ را به این ترتیب:

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

چون نباید از آن استفاده کنیم، با تبدیل متغیر داریم:

$$n(s') = s'^2$$

$$m(s') = 6s'^2 - 5s' + 1$$

$$G(s') = \frac{s'^2}{6s'^2 - 5s' + 1} \leftarrow s = \frac{1-s'}{s'}$$

از مثال قبلی، چند جمله‌ای نسبت به s درج اول مرتبه می‌نویسیم:

$$u(s') = -30s' + 19$$

$$v(s') = 5s' + 1$$

با استفاده از تغییر متغیر $s' = \frac{1}{s+1}$ داریم:

$$\begin{cases} N(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \\ M(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s) = \frac{19s-11}{s+1} \\ V(s) = \frac{s+6}{s+1} \end{cases}$$

* تجربه: پارامترهای کدورتی: سیستم‌های ناپایدار:

سیستم $SISO$ ، P را در نظر بگیرید که می‌تواند ناپایدار باشد. حال از این سیستم با بازخورد هم‌اثر به شکل $P = N/M$ نوشته و دو تابع تبدیل U و V را به این ترتیب می‌نویسیم:

مشتق‌دهنده U و V را به این ترتیب می‌نویسیم:

$$\left\{ C(s) = \frac{U + M Q}{V - N Q}, \quad Q \in K H_0 \right\}$$

توضیح: سود که از تبع تبعه P به دست می آید، انشاء

$$\left. \begin{array}{l} N(s) = P \\ M(s) = 1 \\ U(s) = 0 \\ V(s) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow C(s) = \frac{U + M Q}{V - N Q} = \frac{0 + Q}{1 - P Q} = \frac{Q}{1 - P Q}$$

که درختی قبل از جمع به آن ترفیع دادند.

در این شرایط برای تسخیر نیاید، اگر چه جمع حسابی و تمام حسابی را می توان شل ۵۰ به صورت سرزمین

$$S = M (V - NQ)$$

$$T = N (U + \mu Q)$$

* بحیرہ یا پادری لندر لندرہ : کارای سیم سیمو

[illegible]

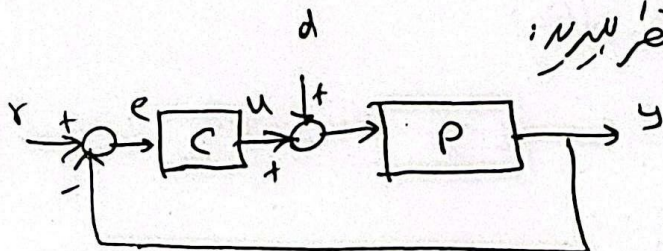
کدامند مطمح مسدود، توابع پایه تفحص کارایی با اتفاده از انواع حساسیت، مهم حساسیت تعیین می شوند.

در این صورت به تدریج آنرا به شکل شبه حلقی و علی مبنی بر پایه سازی این که امکان پذیر خواهد بود زمینه سازی

این توابع در فضای H^{∞} جبر ادا هم میباشند و مورد بررسی آن در فواید در انتهای این بخش، خود اشیاء $\mathcal{Q}$

در عمده می شمارند که کشته های پادشاهی به منظور تائید العداوت کاری با بدو مثال، بیان خواهد شد.

مسئله: تابع تبدیل $P(x)$ را در سمت چپ مسطور و عدد در سمت راست آن قرار دهید:



$$P = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

برای این سیستم کنترل C را طوری بسازید که:

(الف) سطح پیوسته یا پیوسته خطی داشته باشد.

(ب) سینکال خروجی y ، ورودی u را به 2 را تعقیب کند، خطای ثابت نداشته باشد.

(ج) مقدار زیادی سینکال خروجی y ، در هنگامی که اغتشاش d به شکل یقین با فرکانس $\omega = 10$ rad/sec
من شود برابر با صفر گردد.

حل: با توجه به اینکه تابع تبدیل P ناپایدار است، برای تقویت یا پایداری داخل سیستم شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$CCS = \frac{U + M Q}{V - N Q} \quad Q \in RH_{\infty} \quad \text{باشد (از طرفی)}$$

$$T = N(U + M Q) \quad \text{تابع تبدیل از ورودی u به خروجی y برابر است با:}$$

طبق قضیه مقدار نهایی با توجه به $T(s)$ در $s \rightarrow 0$ برابر با یک شود تا ورودی به تعقیب شود.

$$T(0) = N(0) (U(0) + M(0) Q(0)) = 1$$

باصل شرط صفری برای Q داریم:

$$\begin{cases} N(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \\ M(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} U(s) = \frac{19s-11}{s+1} \\ V(s) = \frac{s+6}{s+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = 1(-11 + 2 Q(0)) \Rightarrow Q(0) = 6$$

از طرفی با توجه به شکل، تابع تبدیل از ورودی d به خروجی y برابر است با:

$$\frac{y(s)}{d(s)} = P(s) S(s) = N(V - N Q)$$

مقدار این تابع در فرکانس ω را $S \rightarrow j\omega$ به پیر برابر با صفر شود.

$$N(j\omega) (V(j\omega) - N(j\omega) Q(j\omega)) = 0$$

45

باجل معادله جبری در شرط دیکر برای Q می باشد:

$$Q(10j) = \frac{V(10j)}{N(10j)} = \frac{(6+10j)(1+10j)}{1} = -94 + 70j \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}[Q(10j)] = -94, \quad \operatorname{Im}[Q(10j)] = 70$$

حال برای تابع Q رابطه را بدست آوریم که به شرط فوق برآورد باشد. از میان بی نهایت فرم

$$Q(s) \in RH^\infty \text{ یکی را انتخاب می‌کنیم: } Q(s) = a_1 + a_2 \frac{1}{s+1} + a_3 \frac{1}{(s+1)^2}$$

انتی می‌کنیم:

$$Q(0) = 6 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 6 \quad (1)$$

$$Q(10j) = -94 + 70j \Rightarrow$$

$$a_1 + a_2 \frac{1}{10j+1} + \frac{a_3}{(10j+1)^2} = -94 + 70j$$

$$a_1 + \frac{a_2}{101} - a_3 \frac{99}{10201} = -94 \quad (2)$$

$$-a_2 \frac{10}{101} - a_3 \frac{20}{10201} = +70 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \xrightarrow{\text{Solve}} a_1 = -79 \quad a_2 = -723 \quad a_3 = 808$$

$$Q = \frac{-79s^2 - 881s + 6}{(s+1)^2} \Rightarrow C = \frac{-60s^4 - 598s^3 + 2515s^2 - 1794s + 1}{s(s^2+1)(s+9)}$$

برای یک سیستم بسته 2، یک کنترلر بسته 4 ای داشته‌ایم که توانسته شرایط کارایی زیر را برآورد.
برای این سیستم با توجه به این مثال برای دسترس به روابط کارایی باید کام‌های زیر را بشود

- نحوه تماس کنترل کننده‌ها با پدیده‌ها را باید بداند.
- طبقه مشخصات کارایی را به قیدهای پارامتری تبدیل کند.
- با داشتن فرم مناسب از Q طبقه قیدها را محاسبه کند.
- با داشتن Q ، کنترل کننده $C(s)$ را تعیین نماید.

* پایداری قوی (Strongly Stabilizable)

در بسیاری از کاربردها، مجموعه‌ای از سیستم‌های اصلی خود را می‌خواهیم به منظور حفظ امنیت بیشتر از تغییرات در پایداری در سیستم حلقه بسته استفاده نمی‌شود. توجه کنید که اگر شرایط پایداری در طراحی کنترل کننده باشد، حتی اگر کنترل کننده پایداری باشد، سیستم حلقه بسته می‌تواند پایداری را از دست بدهد. در این شرایط، آریه هر دو حالت حلقه باز و بسته، سیستم هر دو حالت را در نظر گرفته و ناپایداری را حذف می‌کند.

طبق تعریف سیستمی پایدار قوی است اگر پایداری داخلی سیستم حلقه بسته توسط کنترل کننده پایداری C بدست آید.

قضیه: سیستم P پایداری قوی دارد، اگر و تنها اگر تعداد قطب‌های حقیقی بین هر حلقه از صف‌های حقیقی در سمت راست صفحه مختلط زوج باشد.

مثال: پایداری قوی سیستم زیر را بررسی کنید:

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

این سیستم دارای دو صفر در $s=1$ و $s=0$ است.

و مابین این دو صفر فقط یک قطب در $s=2$ وجود دارد. پس این سیستم پایدار قوی ندارد.

مثال: پایداری قوی سیستم زیر را بررسی کنید:

$$P(s) = \frac{(s-1)^2 (s^2 - s + 1)}{(s-2)^2 (s+1)^3}$$

این سیستم دارای دو صفر در $s=1$ و یک صفر در $s=0$ است. همچنین دو صفر در راست

صفحه مختلط دارد که حقیقی نمی‌باشند لذا در از آن صحت ندارد. چون مابین دو صفر غیر برابر

دو قطب $s=2$ وجود دارد پس سیستم پایداری قوی دارد.

* تجزیه ی ماتریس کتل کشته : سیم های چند متغیره (M.I.L)

تجزیه ی ماتریس کتل کشته معمولاً به معنای روش تابع تبدیل استوار است. در این روش کتل کشته، K

به گونه ای بر حسب تابع تبدیل سره و پایداری $Q \in RH_{\infty}$ معین می گردد تا تمامی مولفه های LeA عفو

RH_{∞} نشوند. برای توسعه این موضوع در سیم های چند متغیره باید از مفاهیم قضای حالت بهره گرفت.

طبق تعریف در ماتریس M و N مطلق به RH_{∞} از سمت راست به هم اول گرفته اگر تعداد ستون های آنها برابر در ماتریس V و U به گونه ای بر RH_{∞} وجود داشته باشند تا رابطه زیر برقرار گردد. توجه کنید

که این تعریف بیان دیگری از اتحاد پیرود، بیان می دارد ماتریس $\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ از سمت چپ بر روی

قضای RH_{∞} معکوس پذیر است.
$$\begin{bmatrix} V & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = VM + UN = I$$

به طوری که در ماتریس M و N بر روی RH_{∞} از سمت چپ به هم اول $(Left \text{ Coprime})$ هستند اگر تعداد

ردیف های آنها برابر در ماتریس های V و U به گونه ای بر RH_{∞} باشند تا رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V} & \tilde{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \tilde{V}M + \tilde{U}N = I$$

از ماتریس P ، سه باشد بر اساس فاکتور به هم اول سمت راست می توان نوشت:

$$P = NM^{-1}$$

و بر حسب ماتریس های معکوس سمت چپ نیز داریم:

$$P = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$$

اگر V و U و $\tilde{V}$ و $\tilde{U}$ همگی عفو کمینه RH_{∞} باشند در اینجا پیرود به شکل چند متغیره نیز صادق خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} \tilde{V} & U \\ -\tilde{N} & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -\tilde{U} \\ N & \tilde{V} \end{bmatrix} = I$$

این اتحاد به دو معادله تجزیه می شوند که در معادله درجه چهار به متغیر اصلی این ماتریس بر لایه ۴م دو معادله متفرک
 به صورت:

$$UN + VM = I \quad \tilde{N}\tilde{U} + \tilde{M}\tilde{V} = I$$

$$V\tilde{U} - U\tilde{V} = 0 \quad \tilde{N}M - \tilde{M}N = 0$$

مثال ۱: فاکتورهای مهم اول چپ و راست تابع متباین زیر را به دست آورید.

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

چون تابع متباین پایدار است پس:

$$\tilde{M}(s) = M(s) = 1 \quad \tilde{N}(s) = N(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$V = \tilde{U} = 1, \quad U = \tilde{N} = 0$$

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

مثال ۲: فاکتورهای مهم اول چپ و راست تابع متباین زیر را به دست آورید.

$$\tilde{M}(s) = M(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad \tilde{N}(s) = N(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$V = \tilde{U} = 1, \quad U = \tilde{N} = 0$$

مثال ۳: فاکتورهای مهم اول چپ و راست تابع متباین زیر را به دست آورید.

$$G(s) = \left[\frac{1}{s+1} \quad \frac{1}{s-1} \right]$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad \tilde{N}(s) = \left[\frac{s-1}{(s+1)^2} \quad \frac{1}{s+1} \right]$$

$$\tilde{V}(s) = \frac{s+3}{s+1} \quad \tilde{U}(s) = \left[\begin{matrix} 0 \\ \frac{4}{s+1} \end{matrix} \right]$$

و فاکتورهای سمت راست عبارتند از:

$$M(s) = \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{matrix} \right] \quad N(s) = \left[\begin{matrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{matrix} \right]$$

(97)

$$V(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{(s+1)^2} & \frac{s+3}{s+1} \end{bmatrix} \quad U(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{s+1} \end{bmatrix}$$

زیرا V و U عبارته از:

* روش یافتن زوج فاکتورهای هم اول:

فرض کنید که سیستم P یک ماتریس مربعی باشد که دارای ایندکس ۱ و دیترنال غیر صفر باشد.

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

آرترس K و H به گونه ای باشند که هر دو عبارت $A+HC$ ، $A+BF$ پایدار باشند، تعریف می کنیم:

$$\begin{bmatrix} M & -\tilde{U} \\ N & \tilde{V} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & B-H \\ \hline F & I \\ \hline C+DF & D \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{V} & U \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A+HC & -(B+HD) \\ \hline F & I \\ \hline C & -D \end{array} \right]$$

$$P = NM^{-1}; \quad P = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}; \quad \begin{bmatrix} \tilde{V} & U \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -\tilde{U} \\ N & \tilde{V} \end{bmatrix} = I \quad \text{دایره صورت}$$

$$M(s) = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & B \\ \hline F & I \end{array} \right]$$

$$\tilde{M}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A+HC & H \\ \hline C & I \end{array} \right]$$

$$N(s) = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & B \\ \hline C+DF & D \end{array} \right]$$

$$\tilde{N}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A+HC & B+HD \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

$$U(s) = \left[\begin{array}{c|c} A+HC & H \\ \hline F & 0 \end{array} \right]$$

$$\tilde{U}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & H \\ \hline F & 0 \end{array} \right]$$

$$\tilde{V}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A+HC & -(B+HD) \\ \hline F & I \end{array} \right] \quad \tilde{V}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & -H \\ \hline C+DF & I \end{array} \right]$$

به کنترل کننده پارامتری در حالت S ده:

به منظور حصول در تجربه پارامتری کنترل کننده کسیریم ضمیمه متفرد، در رابطه شکل S ده $P(s)$ را در نظر گرفته میانی فاکتورهای سمت راست به هم لای پیوسته:

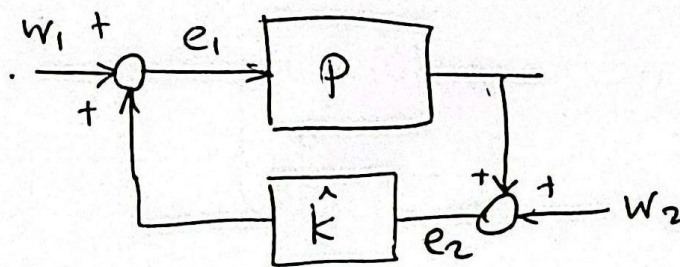
$$P = NM^{-1}$$

$$U(s), N(s), V(s), M(s) \in RH_0$$

$$U(s)N(s) + V(s)M(s) = I$$

می توان ثابت نمود که این سیستم با کنترل کنندهان به صورت زیر پارامتری خواهد شد: $\hat{K}(s) = -K(s)$

$$\hat{K}(s) = -V^{-1}U \quad \text{or} \quad \hat{K}(s) = UV^{-1}$$



(اثبات به عهد،
داشتن
عوض از w_1 ها
در دبی ها e_1 ها تغییر)

* تجربه طایفه کنترل کننده های پارامتری:

می توان نشان داد که تجربه های کنترل کننده های پارامتری از سیستم به صورت شکل زیر است.

$$\left\{ \hat{K} = -(V(s) + Q(s)\tilde{N}(s))^{-1} (U(s) - Q(s)\tilde{M}(s)), Q \in RH_0 \right\}$$

$$\left\{ \hat{K} = -(\tilde{U}(s) - M(s)Q(s))(\tilde{V}(s) + N(s)Q(s))^{-1}, Q \in RH_0 \right\}$$

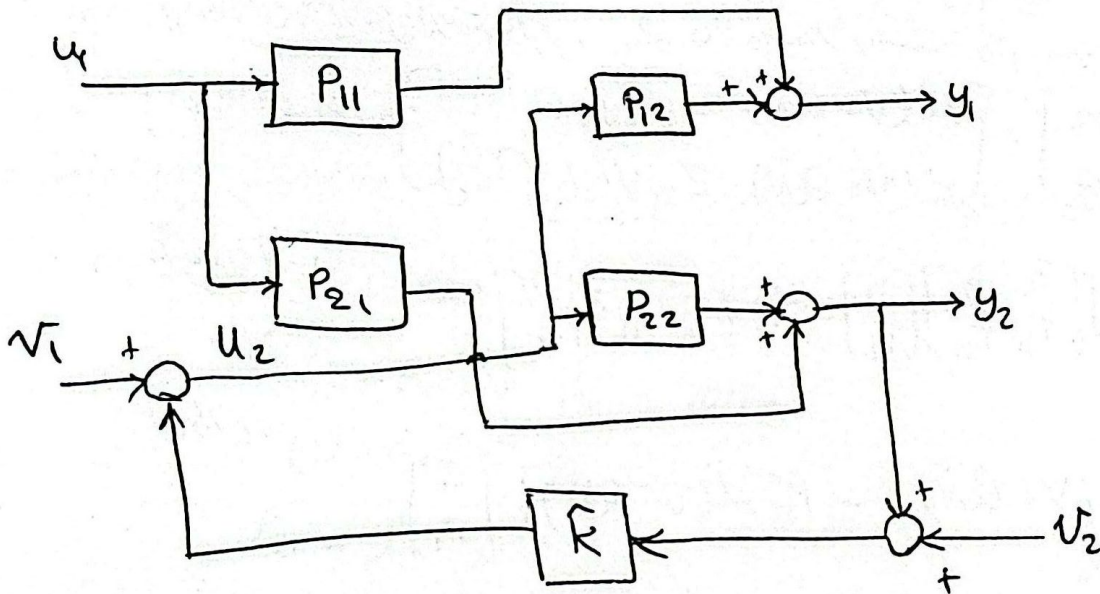
$$T_{er} = \begin{bmatrix} M(V + Q\tilde{N}) & -M(U - Q\tilde{M}) \\ N(V + Q\tilde{N}) & I - N(U - Q\tilde{M}) \end{bmatrix}$$

(اثبات به عهد، داشتن)

$\in RH_0$...

* سیستم و کنترل کننده را در حالت کلی:

مسئله محسوس تنظیم را در نظر گرفته، شکل کلی سیستم مورد مطالعه زیر را در نظر بگیرید:



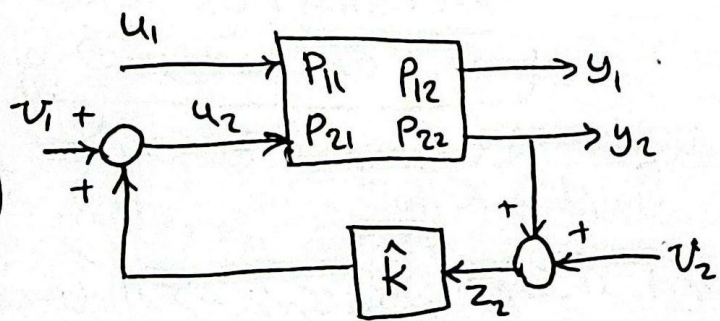
ماتریس تبدیل سیستم به صورت $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد که کنترل کننده

با پارامترهای نهفته قبل از راه اندازی برابر است با:

$$\hat{K} = -(V(s) + Q(s)\tilde{N}(s))^{-1} (U(s) - Q(s)\tilde{M}(s)) \quad Q \in RH_{\infty}$$

اما در این حالت باید شرایط زیر را

بررسی (admissibility condition) نیز محقق گردد.



اثبات : ابتدا فرض کنید که $u_1 = 0$ و تابع تبدیل مربوط به خروجی y_1 را می بینیم.

$$y_1 = P_{12} u_2 = P_{12} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{از طرفی داریم:}$$

مقدار T از بخش گذشته با فرض $P_{12} = P_{22}$ می بینیم که است:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(V+Q\tilde{N}) & -M(U-Q\tilde{M}) \\ N(V+Q\tilde{N}) & I-N(U-Q\tilde{M}) \end{bmatrix}$$

$$y_1 = P_{12} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = P_{12} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{جایگزینی کنید:}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} P_{11} M(V+Q\tilde{N}) & -P_{12} M(U-Q\tilde{M}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{لذا داریم:}$$

برای حفظ پایدار بودن سیستم نشان دهیم که:

$$\begin{bmatrix} P_{12} M(V+Q\tilde{N}) & -P_{12} M(U-Q\tilde{M}) \end{bmatrix} \in RH_{\infty}$$

بنابراین اینکه M و N متعلق به RH_{∞} هستند پس داریم:

$$\underbrace{P_{12} M(V+Q\tilde{N})}_{\in RH_{\infty}} + \underbrace{P_{12} M(U-Q\tilde{M})}_{\in RH_{\infty}} N \in RH_{\infty}$$

$$\Rightarrow P_{12} M \left[\underbrace{(V+Q\tilde{N})}_{\textcircled{1}} \underbrace{M}_{\textcircled{2}} + \underbrace{(U-Q\tilde{M})}_{\textcircled{3}} \underbrace{N}_{\textcircled{4}} \right] \in RH_{\infty}$$

I $\rightarrow$ بازوی پایداری

$$P_{12} M \in RH_{\infty}$$

لذا این شرط نیز برقرار است که از تجزیه پارامتری $P_{12} = P_{22}$ می آید. این است که

$$P_{12} M \in RH_{\infty}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{با توجه به تابع تبدیل که می بینیم:}$$

مطلوبه است که اگر

49

$$\left. \begin{aligned} y_2 = z_2 &= P_{21} u_1 + P_{22} u_2 \\ u_2 &= \hat{K} z_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_2 = P_{21} u_1 + P_{22} \hat{K} z_2$$

$$= (I - P_{22} \hat{K})^{-1} P_{21} u_1$$

$$u_2 = \hat{K} (I - P_{22} \hat{K})^{-1} P_{21} u_1$$

بجایگزینی در u_2 :

$$y_1 = P_{11} u_1 + P_{12} u_2$$

بجایگزینی در y_1 :

$$y_1 = [P_{11} + P_{12} \hat{K} (I - P_{22} \hat{K})^{-1} P_{21}] u_1$$

برای حفظ پایدار بودن سیستم باید نشان داد که این ترم نیز پایدار است. RH_∞ است. پس لازم است رابطه زیر برقرار باشد:

$$P_{11} + P_{12} \hat{K} (I - P_{22} \hat{K})^{-1} P_{21} \in RH_\infty$$

$$\hat{K} (I - P_{22} \hat{K})^{-1} P_{21} \in KH_\infty$$

$$(I - P_{22} \hat{K})^{-1} P_{21} \in KH_\infty$$

$$P_{22} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$$

برای این منظور:

$$\hat{K} = -(\tilde{U} - M Q)(\tilde{V} + N Q)^{-1}$$

ولدا

$$(I - P_{22} \hat{K})^{-1} = (\tilde{V} + N Q) \tilde{M}$$

پس داریم:

$$\hat{K} (I - P_{22} \hat{K})^{-1} = -(\tilde{U} - M Q) \tilde{M}$$

بجایگزینی در اعظم داریم:

$$P_{11} + P_{12} (M Q - \tilde{U}) \tilde{M} P_{21} \in RH_\infty$$

$$(M Q - \tilde{U}) \tilde{M} P_{21} \in RH_\infty$$

$$(\tilde{V} + N Q) \tilde{M} P_{21} \in RH_\infty$$

بنابراین مشتق استخراج قبل این روابط برقرار است،

$$(M Q - \tilde{U}) \tilde{M} P_{21} + (\tilde{V} + N Q) \tilde{M} P_{21} \in KH_\infty$$

$$\rightarrow \tilde{M} P_{21} \in KH_\infty$$

و همچنین می توان نشان داد که:

$$P_{11} + P_{12} (M Q - \tilde{U}) \tilde{M} P_{21} = (P_{11} - P_{12} \tilde{U} \tilde{M} P_{21}) + P_{12} M Q \tilde{M} P_{21}$$

$$\rightarrow P_{11} - P_{12} \tilde{U} \tilde{M} P_{21} \in RH_\infty$$

درین ترتیب برای یک پیکربندی استاندارد LFT کنترل کننده با حالت پایداری P می شود

اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. معادلات P شرایط زیر را برآورده کند:

$$T_{12} = P_{12} M \in RH_{\infty}$$

$$T_{21} = \tilde{M} P_{21} \in RH_{\infty}$$

$$T_{11} = P_{11} - P_{12} \tilde{U} \tilde{M} P_{21} \in RH_{\infty}$$

۲. کنترل کننده با حالت پایداری P_2 می شود

توجه داشته باشید تجزیه کنترل کننده به فاکتورهای به هم وصل تری برای مولفه P_2 صورت گرفته، در این تجزیه کسرها را می توان به صورت P_{11} ، P_{12} و P_{21} استفا دهی شوند. پس از انجام این تجزیه، دقیق کنترل کننده به دست می آید، شرایط پایداری

داخلی فقط برای مخرج خواهد بود که شرایط پذیرش برای سایر مولفه های P_{11} ، P_{12} و P_{21} نیز برقرار می شود.

با وجود این نمونه تجزیه کنترل کننده فاکتورهای به هم وصل اول، اگر شرایط پذیرش پذیرش را به دست می آید، می توان به دست آورد. غایتی که نیز برآورده خواهد بود.

توجه کنید که پیکربندی استاندارد LFT معادله استفا، برای های کنترل کننده های پایداری و فرم زیر تعریف می شود.

$$\|T_{u,y}\|_{\infty} = \| (P_{11} - P_{12} \tilde{U} \tilde{M} P_{21}) + P_{12} M Q \tilde{M} P_{21} \|_{\infty}$$

که به دست شده حل از Q قابل باز نویسی است.

$$\|T_{u,y}\|_{\infty} = \|T_{11}(s) + T_{12}(s) Q T_{21}(s)\|_{\infty}$$

حل مسئله بهینه سازی به یافتن Q_{opt} می شود که نرم نرمی است تابع بهینه حل شده فوق را

کننده می شود

* محدودیت های طراحی

همواره در طراحی کنترل کننده برای ششگفت کارایی مقادیر ϵ محدودیت های ذاتی روی بردار سیستم.

این محدودیت ها عموماً از در مقید کلی ناشی می شوند.

1 - مقید های جبری که بر روابط مستقیم بین توابع تبدیل مختلف مانند S و T منطبق می باشد.

2 - مقید های تحلیلی که رفتار توابع تبدیل مورد نظر را در حوزه فرکانسی مقید می سازند.

* مقید های جبری :

مهمترین مقید های جبری در طراحی کنترل کننده بر روی سیستم پیچیده و اهم عبارتند از :

← اتحاد تابع حساسیت و تکمیل حساسیت

← محدودیت جبری توابع وزنی

← شرایط دینامیکی

* اتحاد تابع حساسیت و تکمیل حساسیت :

بر مبنای تعاریف S و T همواره اتحاد $S+T=I$ برقرار است. لذا $\|S\|$ و $\|T\|$ هر دو نمی توانند در یک فرکانس متغیر $\frac{1}{2}$ شوند. این محدودیت در اصل بر مبنای تعاریف حساسیت

جبری خود را نشان می دهد. سیستم حلقه بسته یک ورودی یک خروجی با پیچیدگی ϵ و حساسیت جبری در نظر گرفته می شود.

در این حالت بر مبنای این کارایی مقادیر با گینه سازی نرم پیچیدگی ϵ فرض کنید $\epsilon < \epsilon_{max}$ حاصل می شود

$$\|W_1 S\| + \|W_2 T\| \leq \epsilon_{max}$$

$S \downarrow \quad T \uparrow \Rightarrow$ باید سیستم بهبود یابد

$S \uparrow \quad T \downarrow \Rightarrow$ کارایی سیستم کم می شود

در سیستم های چند متغیره نیز اسی در $S+T=1$ برقرار است بر این اساس با توجه به خواص مقدار کدنگی در توابع

چند متغیره می توان نوشت:

$$+1 \leq \bar{c}_i(T) \leq \bar{c}_i(S) - 1$$

$$+1 \leq \bar{c}_i(S) \leq \bar{c}_i(T) - 1$$

و لذا $(\text{اند}) \bar{c}_i$ هر دو نمی توانند در یک فرکانس مشخصی با یکدیگر داشته باشند. دیکته از 0.5 شوند. این در

در سیستم های چند متغیره با ثابت بیشتر وجود دارد. زیرا در حالت چند متغیره، مقدار کدنگی بیشینه

اندازه تابع حساسیت و متعصب است. که در محل بزرگ تر از اندازه تک تک عناصر این متغیرهای متغیر

* حساسیت صبری توابع وزنی:

یک مسیح حلقه بسته را با پیچ و واژه وزن منظمی در نظر بگیریم. در این صورت شرط لازم برای کارایی مقادیر آن

است که در هر فرکانس، مقدار کدنگی تابع وزنی حساسیت و متعصب همواره کوچکتر از 1 باشند.

$$w_1 \wedge w_2 \quad \text{فرض ثابت} \quad \min \{ |w_1(\text{اند})|, |w_2(\text{اند})| \} < 1$$

بر مبنای این قاعده در هر فرکانس یکی از دو وزن $|w_1|$ یا $|w_2|$

بزرگتر از یک باشند.

با توجه به اینکه نامی در فرکانس های بالا افزایش می یابد به تبع آن تابع وزنی $|w_1|$ افزایش می یابد.

در این صورت تشخیص کارایی سیستم در فرکانس های بالا باید کاهش یابد.

$$|w_1 S| < 1 \Rightarrow |S| < \frac{1}{w_1}$$

$$|S| < |w_1|^{-1}$$

در مدار در فرکانس که اندازه وزنی بزرگ است تشخیص کارایی غیر ممکن بود. و این موضوع یکی از حلقه های

اثبات:

$$|w_1| = |w_1(T+S)|$$

$$\leq |w_1 S| + |w_1 T|$$

$$\leq |w_1 S| + |w_1 T|$$

از اینجا که

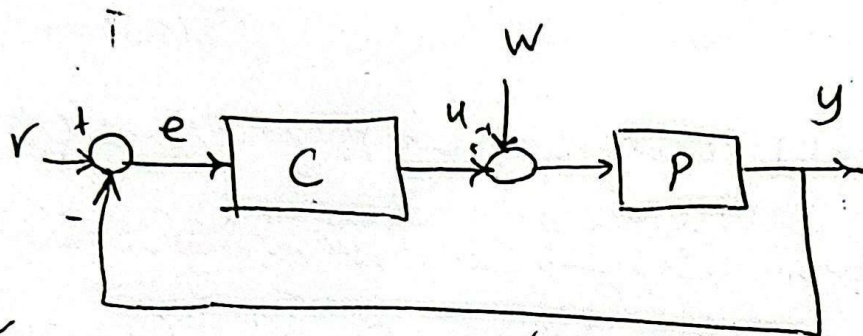
$$|w_1 S| + |w_1 T| < 1$$

در نتیجه:

$$|w_1| < 1$$

شرایط درون‌یابی

معمولاً این هیدروپی در سیستم‌های کنترل شرایطی بودن می‌است.



سیستم دارای
باید درین داخلی نه تنها

با اعمال ورودی‌های

مورد، فردی سیستم مورد نیاز، بلکه باید امکان کنترل هم‌شکلی (فیلتر سیستم اصلی) و نیز خروجی سیستم و کنترل‌های
کنترل دیگر سیستم، به‌علاوه امکان هر نوع ورودی مورد نیاز و درین حالت واقعی یا فرضی، کنترل‌کننده، کنترل‌کننده

کنترل سیستم حلقه بسته یا پیچیده و ساده باید در داخل است، اگرچه سیستم در این حالت در درون مدار

در خروجی و یا باید در این صورت:

$$y(s) = T(s) r + P(s) S(s) w(s)$$

$$u(s) = P^{-1}(s) T(s) y(s) - T(s) w(s)$$

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & P(s) S(s) \\ P^{-1}(s) T(s) & -T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ w(s) \end{bmatrix}$$

در این صورت

به منظور تعیین باید در این حالت غنای ترین تبدیل فوق باید باشد:

در این صورت اگر $P(s)$ ، خود پیچیده و گینه فاز باشد (قطب در صفر یا پیچیده باشد) باید در این صورت

سیستم حلقه بسته یا پیچیده و $T(s)$ یا تابع تبدیل حلقه بسته سیستم تعیین می‌گردد.

در صورتی که سیستم اصلی $P(s)$ دارای قطب ناپایدار P_0 باشد به منظور باید در این صورت سیستم کنترل

$P(s) S(s)$ ، لازم است که $S(s)$ دارای صفری مشابه در صفر خود باشد $S(P_0) = 0$

حال اگر سیمه اصلی $P(s)$ گینه فاز نبوده، دایان صفوی را بنویس است در $z=0$ به منظر
یا بدین $T(s)P^1(s)$ را هم است که $T(s)$ دایان صفوی مشابه در صورت ضرورت است:

$$S(z_0) = 0$$

بدین ترتیب فرض کنیم R قطب نیاید در سیمه حلقه باز $(L = GK)$ را بنویس دایان و $z=0$ صفوی

غیر گینه فاز آن در سیمه صفوی باز سمت راست باشد. شرایط درون سیمه بی (interpolation condition)

بیان می نماید که منظور حفظ یا بدین دایان سیمه حلقه سیمه بی سیمه شرایط در باز باشد

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 + K(s+2)} \frac{s-1}{s+1} \\ &\quad \text{PD} \quad \text{PI} \\ S &= \frac{s+1}{(s+1) + K(s+2)(s-1)} \Big|_{s=1} = 1 \end{aligned}$$

$$S(P_0) = 0, \quad S(z_0) = 1$$

$$T(P_0) = 1, \quad T(z_0) = 0$$

تعمیم این موارد در حالت قطب صفوی نیاید با R با m تکرار، به شرایط درون سیمه بی میجر شود

در این حالت اگر $P(s)$ دایان قطب نیاید با R با m تکرار، صفوی نیاید با R (گینه فاز)

z با m تکرار باشد آنجا شرایط درون سیمه بی میجر شود:

$$\left\{ \begin{aligned} S(P_0) &= \frac{dS(P_0)}{ds} = \dots = \frac{d^{m-1}S(P_0)}{ds^{m-1}} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} T(P_0) &= 1, \quad \frac{dT(P_0)}{ds} = \dots = \frac{d^{m-1}T(P_0)}{ds^{m-1}} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} T(z_0) &= \frac{dT(z_0)}{dz} = \dots = \frac{d^{r-1}T(z_0)}{dz^{r-1}} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} S(z_0) &= 1; \quad \frac{dS(z_0)}{dz} = \dots = \frac{d^{n-1}S(z_0)}{dz^{n-1}} = 0 \end{aligned} \right.$$

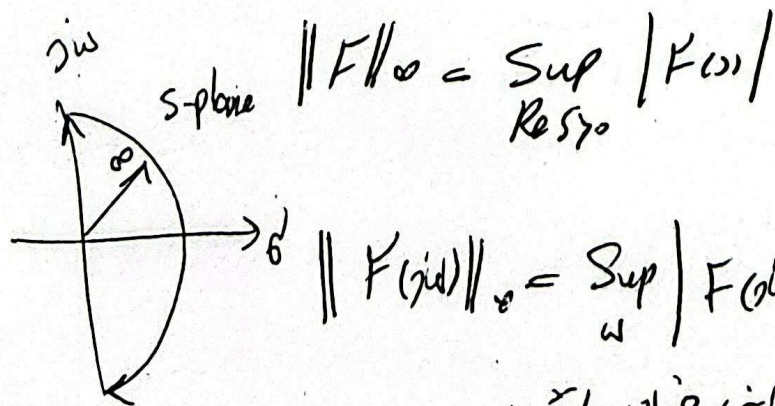
به این دلیل به این معادلات تشریحی درون و بی گفته می شود که در نقاط خاصی از صفحه مختلط که در محل قطب های پایدار، صفرهای غیر کمینه و نسبت به ما باشند، توابع حساسیت، مقادیر حساسیت آن باید دقیقاً بر مقادیر صفر و یا یک درون یا بی شوند.

★ اگر این توابع در این نقاط خاصی در صفحه مختلط، مقادیر حساسیتی اندکی کمتر یا بیشتر از مقدار درون یا بی داشته باشند، پایدار یا ناپایدار نیستیم بلکه نسبت به حساسیت درون یا بی شود.

* قدرهای کلی

۱- قضیه مقدار ریشته (MMLT): در صفحه مختلط S ، محدود ناحیه S باز، ریشته Ω را در نظر بگیرید، مقدار ریشته در این محدوده تابع $F(s)$ کلی باشد و از این ناحیه مقدار K در این محدوده ثابت باشد، آنگاه مقدار ریشته اندر K در محدوده Ω قرار نمی گیرد بلکه بر این مرز آن تابع است.

چون هر تابع تبدیل پایدار فقط در محدوده $Re s < 0$ کلی است آنگاه این قضیه مندی بسیار برای ارزش های پیوسته برای روابط $H(s)$ است و به صورت $H(s)$ متغیر می توان این قضیه به منظور تعیین مقدار ریشته توابع تبدیل پایدار که در نیم صفحه راست کلی است، استفاده نمود.



با توجه به تعریف نرم می نمایم:

$$\|F\|_{\infty} = \sup_{Re s < 0} |F(s)|$$

$$\|F(j\omega)\|_{\infty} = \sup_{\omega} |F(j\omega)|$$

مقدار آن برابر با حداکثر مقدار یا بیشترین مقدار خواص است.

محدوده Ω درون

توابع $F(s)$ در نقطه $s=0$ کلی است.

توابع $F(s)$ در نقطه $s=0$ متغیر می باشد / توابع $F(s)$ در نقطه $s=0$ متغیر می باشد. (در نقطه $s=0$ متغیر می باشد).

نتیجه: تابع متباین در محدوده S ثابت نیست.

مثال: نگارنده که در پیش قبل گفته شد (شواهد و دلائل) تابع متباین حساسیت در محل قطب یا مغناطیس

نسبت باستی به قدر صفر یا کم در دست یابی شود. به این ترتیب در این حالت در یک نقطه از این صفر است
راست و در محدوده S اندر این تابع متباین متباین قرار دارد.

مثال: اگر $F(s) = a s + b$ و $S = \{s : |s| \leq 1\}$ باشد آنوقت بیشینه تابع $F(s)$ را به دست آورده و

پیدا کنید.

حل: از آنکه $S = \{s : |s| \leq 1\}$ و F متباین شود

$$\begin{aligned} \max_{|s| \leq 1} |F(s)| &= \max_{|s| \leq 1} |a(s) + b| = \max_{|s| \leq 1} \sqrt{(as+b)^2 + (aw)^2} \\ &= \max_{|s| \leq 1} \sqrt{a^2(s^2+w^2) + b^2 + 2abw} \end{aligned}$$

از طرفی طبق قضیه مقدار بیشینه؛ مقدار بیشینه $|F(s)|$ را به دست آورده و

$$\sqrt{a^2 + w^2} = 1 \Rightarrow \max_{|s| \leq 1} |F(s)| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2abw}$$

و چون بر روی S $|a| = 1$ ،

$$\Rightarrow \max_{|s| \leq 1} |F(s)| = \sqrt{(|a| + |b|)^2} = |a| + |b|$$

۲- قضیه کوشی، فرض کنید Ω مجموعه باز کران درین دایره محاط باشد که تمام آن دایره است (۶۳)
 D خم بسته ای در این مجموعه بوده فردا معلوم کند. چه نی در این مجموعه F تعریف باشد، آنگاه.

همین دایره را D در نظر بگیریم
 این حالتی است که F در D تعریف شده است
 و F در D تعریف شده است
 و F در D تعریف شده است

$$\oint_D F(z) dz = 0$$

همه برابر با یکدیگر است و در این صورت F در D تعریف شده است.

* فرض کنید که F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.

قضیه کوشی، فرض کنید که F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_D \frac{F(s)}{s-s_0} ds$$

* فرض کنید که F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.

فرض کنید که F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.

$$F(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{\omega}{\omega^2 + (s_0 - \omega)^2} d\omega$$

استفاده از این فرمول در درین موارد کاربرد دارد $F(s) \in H_{\infty}$ است. اگر نقطه s_0

قطب باشد درین صورت که F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.
 به شرایط بودن F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.
 صحت این شواهد آنکه F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.

به توجه به این که F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.

برای F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.

چون F در D تعریف شده است و F در D تعریف شده است.

۳- محله درستی توابع وزنی w_1 و w_2

الف) فرض کنید تابع شبکه در حلقه باز $L=K$ دارای یک منفرغ غیر کمینه فاز 2π باشد که درست است

صفحه مخلوط فرکانس در این صورت کارایی نامی سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\|w_1 s\|_{\infty} \geq |w_1(z)|$$

$s(2) = 1$
 از کمال می باشد

نتیجه: شرط لازم برای اینکه معیار کارایی $\|w_1 s\|_{\infty} < 1$ باشد آن است که $|w_1(z)| < 1$ باشد

به عبارت دیگر برای تابع وزنی w_1 در مدل منفرست راست صفحه مخلوط بسته حلقه باز $L=K$ باید که صفحه از یک باشد.

ب) فرض کنید تابع شبکه در حلقه باز $L=K$ دارای یک قطب نیاید در P در صفحه مخلوط بسته است که

$$\|w_2 T\|_{\infty} \geq |w_2(p)|$$

داشته باشد. در این صورت:

نتیجه: شرط لازم برای اینکه معیار در مقادیر $\|w_2 T\|_{\infty} < 1$ برقرار باشد آن است که $|w_2(p)| < 1$ باشد

با توجه به عبارت دیگر برای تابع وزنی w_2 در مدل منفرست چپ نیاید در صفحه باز $L=K$ باید که صفحه از یک باشد.

۴- فاکتوراس درونی-بیرونی:

توابع شبکه را به RH_{∞} تقسیم کنیم (AK_{pass}) یا درونی (Inner) نامیده می شود اگر

اندازه آن در تمام فرکانس ها برابر واحد باشد. (یک قطب که به یک صفر در فرکانس کنیال در می آید)

توضیح: بقوت آن! اء فرد عبور دهد

به این معنی که آن داده این توابع دارای توان منفرغ قطب حول کمره می هستند.

54

مثال: $1, \frac{s-1}{s+1}, \frac{s^2-2s+2}{s^2+2s+2}$

تابع تبدیل در RH_{∞} کمینه فاز (min phase) یا بیرونی ($outer$) نامیده می شود اگر هیچ صفری در سمت راست صفحه مختلط نداشته باشد. این اصطلاح بیان می دارد که اگر تابع تبدیل یا کمینه فاز باشد، توابع تبدیل بسیاری دیگر مانند G که وجود دارد اندر آن خاصیت باقی است. در این حالت کافی است که K هم گذر آنی باشد. همه این توابع تبدیل ای داشته فاز بزرگتری از تابع تبدیل

کمینه فاز خواهند داشت. $\frac{s+3}{s^2+2s+1}, \frac{s^2}{s+2}, \frac{1}{(s+1)^2}$

* قضیه: هر تابع تبدیل G متعلق به RH_{∞} را می توان بر حسب دو تابع حردونی (G_i) و بیرونی (G_o) به شکل $G = G_i G_o$ فاکتور سازی نمود. این فاکتور ها به این گونه به علامت شدن انتخاب می شوند.

مثال: $G = \frac{4(s-2)}{s^2+s+1} = \left(\frac{s-2}{s+2} \right) \left(\frac{4(s+2)}{s^2+s+1} \right) = G_i G_o$

۵- اثر ترسکی قطب و صفر

فرض کنید P یک سیستم با صفر غیر کمینه فاز z و یک قطب ناپدید p در نیم صفحه سمت راست صفحه مختلط باشد: $(Re(p) > 0, Re(z) < 0)$ و تبدیل کننده G هیچ صفر و قطبی در سمت راست صفحه مختلط نداشته باشد.

سپس تابع حساسیت می توان به صورت زیر فاکتور زد: $S = S_i S_o$

که در آن $S_i = \frac{s-p}{s+p}$ باشد. به گونه به شرایطی درون را می می دانیم که $S(z) = 1$ پس:

$S_o(z) = S_i(z)^{-1} = \frac{z+p}{z-p}$

$\|W_1 S\|_{\infty} = \|W_1 S_o\|_{\infty} \geq |W_1(z) S_o(z)| = \left| W_1(z) \frac{z+p}{z-p} \right|, \quad |z|=1$

و به طرشت به برای تابع صحت :

$$T = T_i T_o \quad , \quad T_i = \frac{s-2}{s+2}$$

$$T_o(p) = T_i(p)^{-1} = \frac{p+2}{p-2} \quad \text{در نتیجه } T(p)=1$$

$$\|W_2 T\|_{\infty} = \|W_1 T_o\|_{\infty} \geq |W_2(p) T_o(p)| = |W_2(p) \frac{p+2}{p-2}|$$

نتیجه : اگر قطب ها، ضرایب سمت راست عدد صفری هم نزدیک به شده آنگاه می توانسته اثر کمتری

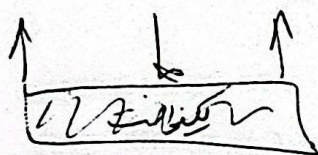
به توجه به در رابطه زیر تقویت کنند

$$\|W_1 S\|_{\infty} \geq |W_1(z) \frac{z+p}{z-1}|$$

$$\|W_2 T\|_{\infty} \geq |W_2(p) \frac{p+2}{p-2}|$$

در نتیجه می بینیم به معنی اول $\|W_1 S\|_{\infty}$

و $\|W_2 T\|_{\infty}$ سمت تر خواهد بود



۶- اثر تشکله آبی

این اثر، محدودیت در شکل دهی توابع صحت و سطح صحت را به صورت رضی توابع می کند.

برای بیان این اثر، فرمول انتقال پتانسون را در نظر بگیرید. به یادش برای هر نقطه در سطح صحت راست

همیشه مملکت $\{ \omega_0 + j\omega \mid \omega_0 \in S, \omega \in \mathbb{R} \}$ و فرمول انتقال را می توان برای گاریم توابع تبدیل در ω_0

که تابع تبدیل مینه فاز یا پدوار $S(s) \in RH_{\infty}$ از انتقال پتانسون نتیجه گرفت :

$$\log |S_o(s_o)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |S_o(u)| \frac{\omega}{\omega_o^2 + (u - \omega_o)^2} du$$

فاکتور بردن مینه فاز تابع $S(s)$ است.

نکته اول: سمت چپ اشترال، که داریم معادله در تابع تبدیل در یک نقطه خاص در نیم صفحه سمت راست است.

معمولاً این نقطه صفر (یا قطب) متعلق به نیم صفحه سمت راست است که تابع تبدیل در آن نقطه درون یک

شده و معین است.

$$S = S_i S_o \rightarrow |S_i(s_o)| = 1 \Rightarrow$$

$$|S(s_o)| = |S_o(s_o)|$$

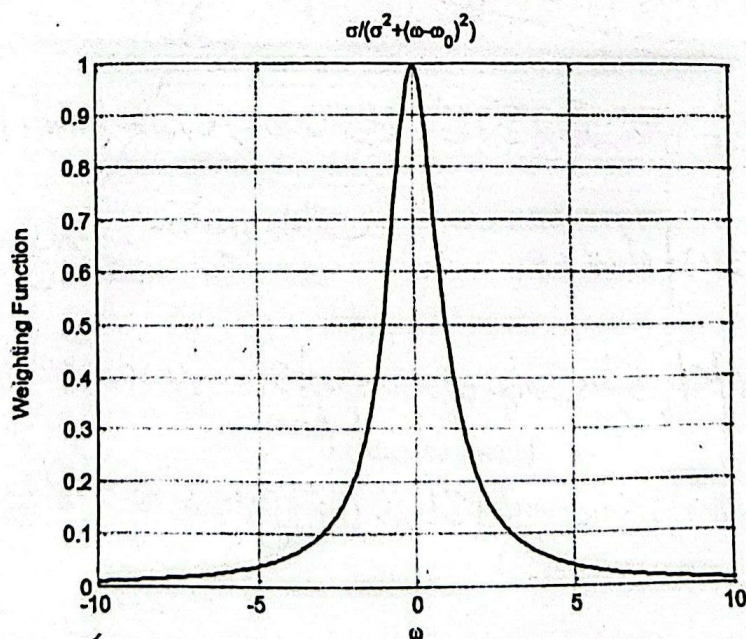
حال اگر $z = s_o$ باشد،

$$S(s_o) = S_o(z) = 1 \Rightarrow |S(s_o)| = 1$$

حالتی که سمت راست اشترال کاهشی، اندر زده تابع در یک کدده فرکانس است. به عبارت دیگر به منظور ضعیف شدن این اشترال لازم است نواحی مثبت و منفی آن با هم برابر باشند.

نکته دوم: در سمت چپ اشترال با سینی به صورت $\frac{\omega_o}{\omega_o^2 + (\omega - \omega_o)^2}$ در $|S(s)|$ اعمال کوچه نمود

از برای این جناب حکم تابع را اینگونه که در فرکانس های مختلف که داریم اندر زده تابع $S(s)$ را وزن دهی می کنند.



$$S_o = 1$$

$$\omega_o = 1$$

$$\omega_o = 1$$

$$\frac{\omega_o}{\omega_o^2 + (\omega - \omega_o)^2}$$

این مورد در شکل دهی توابع حساسیت و عدم حساسیت اصطلاحات اثر شبکه آبی یا اشترال های حساسیت (Sensitivity Integrals) گفته می شود.

۷- فرمول مساحت

فرمول مساحت (Area Formula) که به اشکال حساسیت بوردی (Boole Sensitivity Integral) نیز معروف است، براعظم این کاربرد

برای مساحت زیر نمودار تابع حساسیت ارائه می دهد. (استفاده از این تئوری، محدود به نقاط درونی نمی شود).
 نبود. در این کار از فرمول انتگرال حساسیت مجوی تر است. در این رابطه فرض می شود که تابع تبدیل حلقه
 (L) دارای درجه نسبی (تعداد قطب ها نسبت به صفر ها) کم دریا بیشتر است.

* قضیه: اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم $L = PC$ دارای درجه نسبی دریا بیشتر باشد و تعداد قطب ها
 است راست صفحه مختلط آن N_p و مکان آن P_i باشد، آنگاه:

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(P_i)$$

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = \pi \log(e) \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(P_i)$$

که در این رابطه $\operatorname{Re}(P_i)$ به معنای قسمت حقیقی قطب P_i بود، و $e = 2.7183$ عدد بی‌نهایت

نتیجه ۱: اگر سیستم حلقه باز پایدار باشد آنگاه تعداد قطب های سمت راست صفحه مختلط آن برابر با

صفر است و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = 0$$

نبا این مساحت منفی $|S|$ برابر با مساحت مثبت $|S|$ می باشد. پس چنانچه بی‌نهایت

اواشینی به آنگاه نتیجه آن اوج بیشتر $|S|$ است.

مثال: سیستم دینامیک زیر را در نظر بگیرید و سیستم فیدبک زیر را بسازید.

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \quad C(s) = 10$$

حل: بر حسب سینی این سیستم $PC = 10$ برابر با 2 است و نیز توسط درجهت راست صحنه تحلیط دارد.

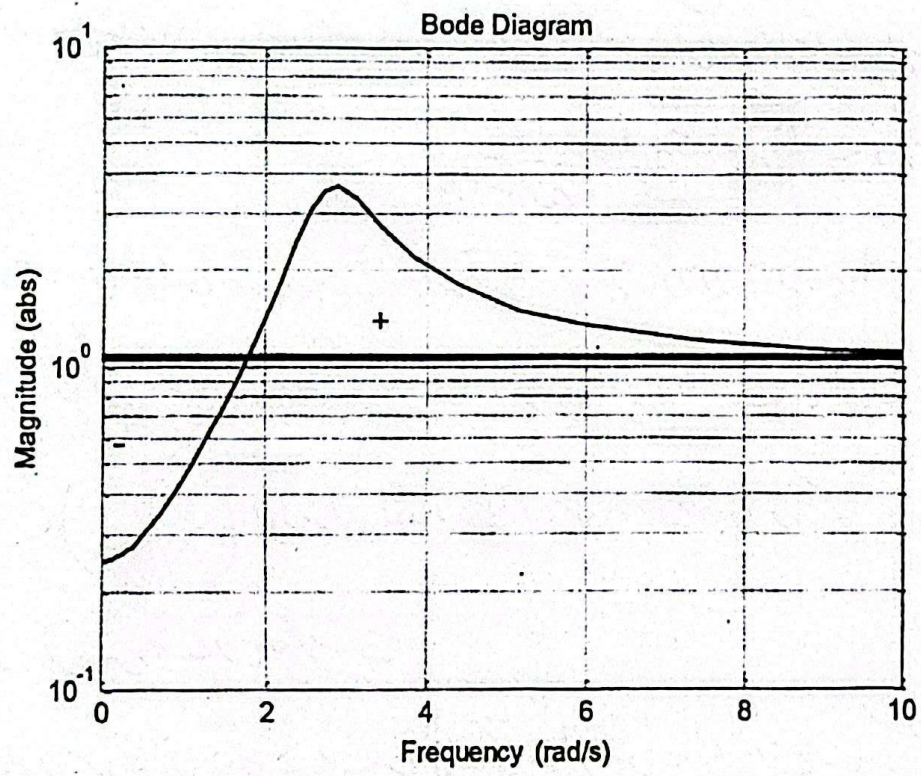
طبق فرمول مسافت: $\int_0^\infty |s(j\omega)| d\omega = n \log(e) (1) = 1.3644$

پس مجموع مسافت مثبت و منفی تابع مسافت باید برابر با 1.3644 آگردد.

این فرمول بیانگر آن است که در سینی گارانتی مسافت منفی که مورد نیاز برای ردیابی است، باید توسط مسافت مثبت

جبران گردد. در شکل زیر سینی $|S(j\omega)|$ بر حسب گارانتی در مقابل فرکانس را خطی رسم کرده است.

$$|S| = 1 \Rightarrow |s| \leq 1$$



منحنی $|S(j\omega)|$ (بر حسب لگاریتم) در مقابل فرکانس ω (بر حسب خطی).

$$\int_0^\infty \ln |\det S(i\omega)| d\omega = \sum_j \int_0^\infty \ln \sigma_j(S(i\omega)) d\omega$$

$$= n \sum_{i=1}^{N_r} \text{Re}(p_i)$$

اثرات صفی غیر کمینه فاز در سیم شش در با توجه به قید صبری $1 = S(z)$ قبل بحث است. واضح است که اگر در این شرایط امکان کوپل زنی $1 \leq S$ در مقایسه با عدد یک فراهم نشود، لذا امکان داشتن کار در مطلب در شرایط دخواه همکار امکان پذیر نیست و کم در دست در کار این ایضا خواهد شد.

$$G(s) = \frac{-s+1}{s+1}$$

کوه سنج : قطب پیدارد و منور غیر کمنده صند، حله از تشریح کمنده ای به شکل زیر بر این آستان منور می باشد

$$K(s) = K_c \frac{s+1}{s} \frac{1}{0.05s+1}$$

اسنگہ زمین استقرار کھیتی باڑی کے لئے اعلیٰ قدرتی ایندھن کھیتی باڑی، اور اس پر فوجی (Tunder shoot)

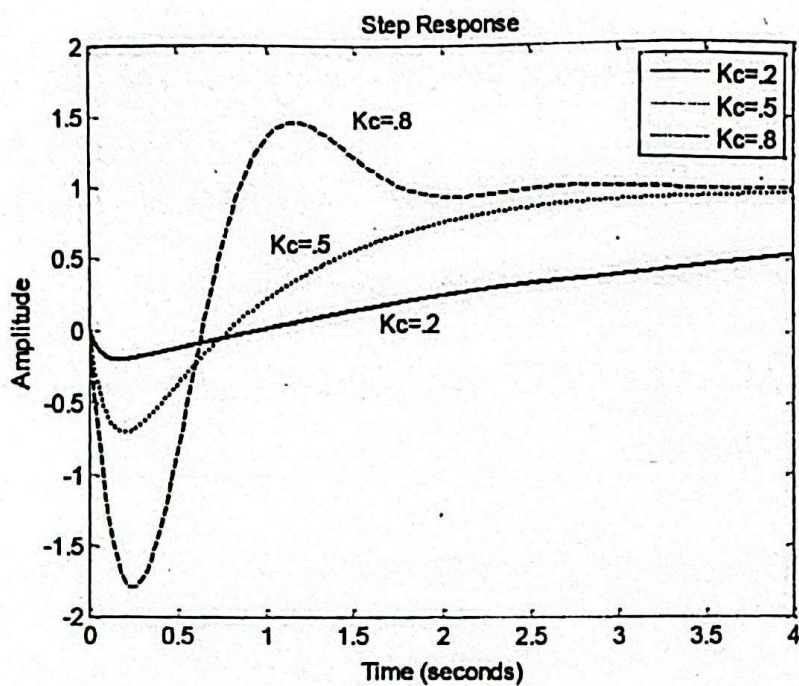
و فراموشی (Over shoot) بود. لذا امکان طاقی بر اساس پیرد فردو نیست معلوم. زن ان سقراطی

فراہمیش دفر دیش مکان نہر سیت۔

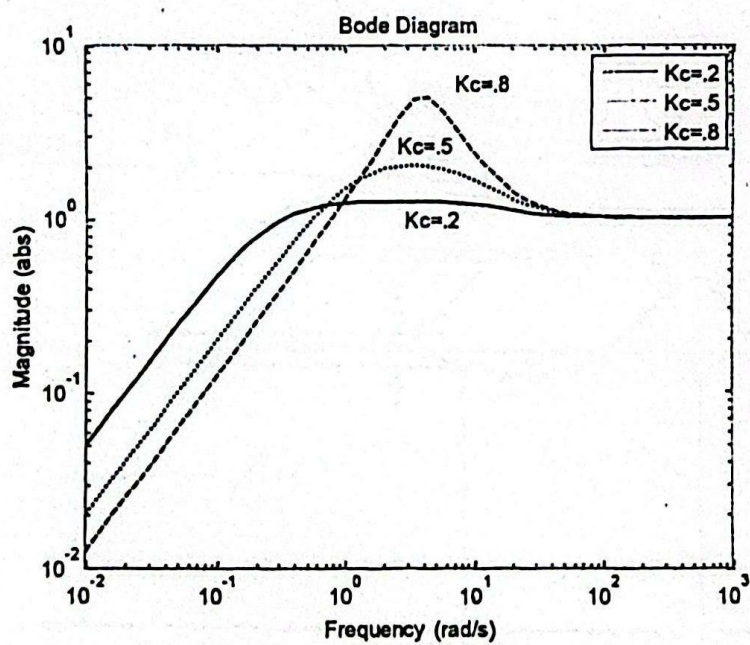
همچنین پاسخ زکاتش (سوره) S شان می دهد که μ افزایش K ، نیروی باینده نیروی کشنده اما حلقه باینده است

نیز چون میزان فرشتی می باشد که این محل نامعلوم است.

57



اثرات صفر غیر کمینه فاز بر روی کارایی حاصل از پاسخ پله



اثرات صفر غیر کمینه فاز بر روی تابع حساسیت

* نحوه انتخاب توابع وزنی

یکی از مکنش های مهم در مسائل کنترل، انتخاب مناسب توابع وزنی است.

See:

→ S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control Analysis and Design*, 2nd Ed, John Wiley, 2005.

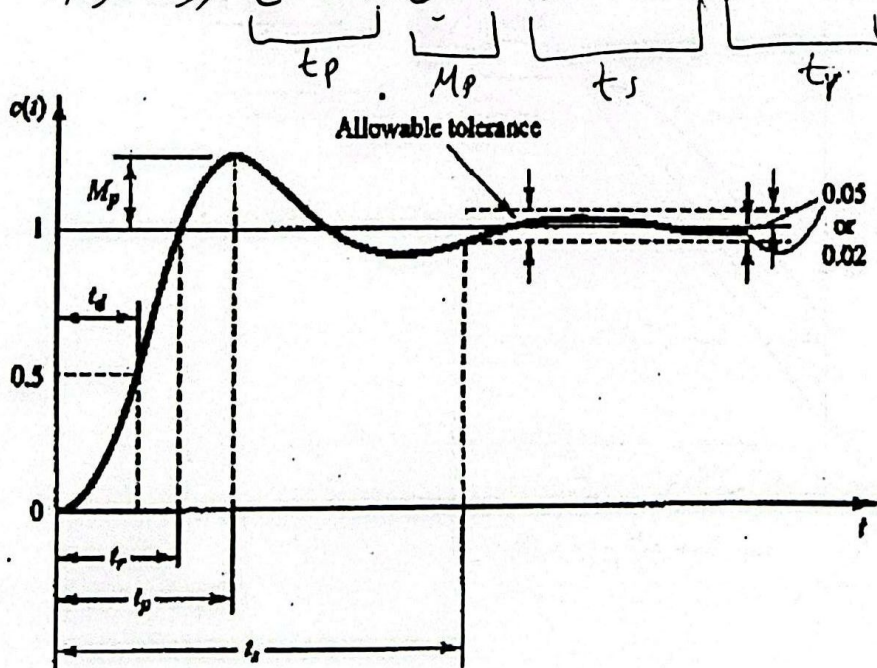
→ K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

بطوریکه می توان از طریق توابع وزنی، مشخصات عملکردی سیستم کنترل را به شکل مطلوب بیان نمود. معمولاً این کار با بیان تفاوت ابعاد ماسک ها به عنوان مورد. مثلاً اگر سیستم حلقه بسته

$$L = \frac{C \omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

مرتبه دوم باشد:

آنوقت سیستم حلقه بسته ما دارای پاسخ در فرکانس نسبت به ورودی پله دارم. خواصی که می توان از اساس آن مفاهیم: زمان صعود، نوسان استوار، فراخشی در زمان آویج، کوپت شوند.



تعریف پارامترهای سیستم حلقه بسته در پاسخ به ورودی پله.

38

• زمان صعود برابر با زمان است که پاسخ سطح حلقه نسبت به ورودی پله ولتاژ از ۱۰٪ به ۹۰٪

(۵٪ به ۹۵٪ از نظر به اذیت) مقدار زیادی خود پرست که با توجه به شکل این مقدار به دست

از صحت باشد:

$$t_r \approx \frac{0.6 + 2.16 \xi}{\omega_n} \quad 0.3 \leq \xi \leq 0.8$$

• زمان استقرار: برابر با زمانی است که پاسخ رسیدن و بماند در محدوده ۲٪ (۵٪)

مقدار زیادی لازم است. تعداد آن: ۲٪

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

• فراموشی: برابر با میزان بیشه انحراف از مقدار ولتاژ پاسخ پله است.

$$M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100 = \frac{C(\infty) - C(0)}{C(0)} \times 100 \quad 0.2 < \xi < 1$$

← پاسخ سطح حلقه نسبت به ولتاژ است.

* پهنای باند:

همان طوری که گفته شد سرعت پاسخ به مقدار بیشه تابع تبدیل حلقه نسبت به ارتباط دارد. به طوری که پهنای باند بزرگ، با زمان صعود سریع تر متناسب است به گونه ای که تبدیل های با فرکانس بالاتر، راحت تر از خروجی عبور کنند همچنین در سیستم های باندهای بزرگ تر حساسیت خروجی به اغتشاش (نویز) در تغذیه یا راندها زیاد است. لذا می توان نتیجه گرفت که اگر بخواهیم باند سیستم کو طبقه باشد، زمین پاسخ عمومی آهسته اما سیستم دارای مقادیر بیشتری است.

گرفتن پهنای باند: (Band width): به مقدار محدود پهنای باند (B) یا فرکانس (f) است که

که کمتر در یک سوئیچ است. به عوامل در بیشتر موارد نیازمند تغییراتی است که در فرکانس های ω_{so} (Effective)

لحقی حالت مانند کار نیز به حدت مناسب عمل کنند پس به طور کلی می توان فرکانس ω ها را از فرکانس
نیروی باند عبور. این نکته مهمی است زیرا که به نوع فیلتر شدن ما تقارین متعددی داشته باشیم.

تعریف نیروی باند M_{ω} : فرکانس است که $|T(\omega)|$ از مقدار بیشترین $0.707 = -3.03 \text{ dB}$

به این مقدار برابر.

تعریف فرکانس عبور: ω_c : فرکانس است که $|T(\omega_c)|$ از مقدار بیشترین $1 = 0 \text{ dB}$ دارد.

به این مقدار برابر.

به راحتی می توان نشان داد که نیروی باند مطلقاً برابر با فرکانس عبور است. اما به طور کلی می توانیم بگوییم که در واقع نیروی باند
معمولاً از مقدار تقریبی آن که معادل با فرکانس عبور است استفاده می شود.

رابطه زیرین نیروی باند و فرکانس عبور را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\omega_c = \frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$$

بیشترین تشدید: میزان حداکثر افزایش در پاسخ فرکانس سیستم است. به طور کلی می توانیم بگوییم که به مقدار

ضریب میرایی M_r به نسبت نرم در ارتباط است:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

لذا برای این کوپل سولان افزایش می یابد و M_r کوچک می شود.

حاشیه فاز: به طور کلی به می توانیم حاشیه فاز ϕ را نیز به صورت زیر بنویسیم:

زیرین به صورت:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}$$

۵۹ * آلودگی توابع وزنی بر حسب فیلترهای پسیو گذر بالا گذر

به طوری که بتوان توابع وزنی را متناسب با کارکرد آن بر حسب فیلترهای پسیو گذر بالا گذر مدل نمود. مشکل هر یک فیلتر پسیو گذر که این آلودگی توابع وزنی استفاضا شود:

تابع وزنی کاری $\alpha < \beta$

$$W_1(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \beta s} \quad \alpha < \beta$$

بیانگر آلودگی پسیو گذر بالا گذر است.

به طوری که فیلتر پسیو گذر بالا گذر در آلودگی توابع وزنی ناسی

$$W_2(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \beta s} \quad \beta < \alpha$$

مثال: تابع وزنی کاری از برادر نظر بگیر $\alpha = 0.01$ و $\beta = 1$

$$W_1 = \frac{s+100}{5(s+1)}$$

لذا فرکانس شکست به صورت تقریبی پسیو گذر بالا گذر است

$$\omega_{bw} = 0.1 \text{ rad/sec}$$

با توجه به اینکه تابع حساسیت در پسیو گذر بالا گذر است

$$\|W_1(s)\|_\infty < 1 \Rightarrow W_1^{-1}(s) = \frac{5(s+1)}{s+100}$$

البته دقت نموده چون در ω_{bw} تابع وزنی پسیو گذر بالا گذر است، پسیو گذر بالا گذر است

شکست خواهد بود. در غیر این صورت پسیو گذر بالا گذر است. دلیل این

تفاوت متفاوت در پسیو گذر بالا گذر است که این تابع شکست است در پسیو گذر بالا گذر

در توابع تغییر دیگر فریب شده، به ω_{bw} آن تغییر نموده اما فرکانس شکست ثابت است.

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_1^{-1}(s) = \frac{5(s+1)}{s+100} = 0.05$$

همچنین حساسیت ثابت ماندگار
٪۵ حساسیت

مثالی، یک سیمه دار این نامی به گونه ای است که در فوکسن های پستین زیر ۲ رار این بر شانه در حدود
۲۵ از مدل های اخراج دارد اما با افزایش فوکسن از ۱۰ تا ۲۰ بر شانه، اخراج آن به مدل
نی افراشید پیدا می نماید به گونه ای که در فوکسن ۳۴ به حدود ۴۰ درصد مارک ۱۰ این
تفصیلات نامی مدل راه صورت نامی ضربی و تابع عزیزی مناسب بین نامی.

حل: توصیه می‌شود که در این فیلتر ارضه ایب $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{1}{32}$ به متلود فرکانس‌های مورد نظر استفاده شده و با تنظیم بهره γ فیلتر به میزان $\epsilon = 0.25$ مقدار تابع وزنی در ω_{so} برابر با 0.25 و با افزایش فرکانس $\omega \rightarrow \infty$ به 4 برسد.

$$W = 0.25 \frac{\frac{1}{2}S+1}{\frac{1}{32}S+1} = 4 \frac{S+2}{S+32}$$

* الکوی توابع وزنی بر حسب اندازه تابع وزنی در فرکانس پائین ، بالا و فرکانس عبور

فیلترهای پسیف گذر و بالا گذر را می توان برای رسیدن به مقدار اندک از سیگنال تغییر داد و هر چه اندک تر تابع فرکانس پسیف ، بالا و فرکانس عبور پسیف نمود. بر این مبنا شکل عمومی $W_1(s)$ و $W_u(s)$ قابل استخراج است.

خلق معراج شهر، در کتب گذشته، جامع حساست به همراه جامع وزنی آن باشد، کو طبعه در کتب

$$\|W_1 S\|_\infty < 1$$

حسب تعین الگوهای تابع درونی (۱۵) مقدار سیستم در حالت
ایزوتان در نظر نگیریم. در بسیاری موارد که مطلوب است تابع تبدیل حلقه باید به صورت سیستم

$$\bar{L} = \frac{W_n^2}{S(S+2\xi W_n)}$$

مرتبه دوم: شد،

68

واضح است که از رابطه پایه کنترل خطی، در این حالت سرعت پاسخ سیستم متناسب با ω_n و فرایشت سیستم نیز به صورت زیر می باشد.

$$S = \frac{1}{1+L} = \frac{S(S+2\zeta\omega_n)}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}$$

در اینجا می بینیم که سیستم تقریباً برابر خواص دارد:

$$\left| S\left(\frac{j\omega_n}{\sqrt{2}}\right) \right| = 1 \Rightarrow \omega_n \approx \frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$$

بالا تر از فرکانس پهنای باند، سیستم حلقه بسته عمل می کند و فرکانس ورودی را دنبال می کند و اغتشاش را حذف می کند.

از رابطه فرکانس های بالا مقدار تابع حساسیت S (تابع تبدیل خطای ورودی) که یک تکواضه بود و لذا

حلقه بسته نزدیک به صفر میل خواهد نمود. همچنین به راحتی می توان ثابت نمود که بیشینه

تابع حساسیت برابر است با:

$$M_S = |S|_{\omega} = \|S(j\omega_{max})\|_{\omega}$$

$$= \frac{\alpha \sqrt{\alpha^2 + 4\zeta^2}}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 4\zeta^2\alpha^2}}$$

در این رابطه α و ω_{max}

برابر هستند:

$$\alpha = \sqrt{0.5 + 0.5\sqrt{1 + 8\zeta^2}} \quad ; \quad \omega_{max} = \alpha \cdot \omega_n$$

مثال: $\zeta = 0.7 \Rightarrow M_S = 1.2764$ و $\omega_{max} = 1.2685 \omega_n$

تابع حساسیت باید رابطه صدق کند:

$$S(s) \leq W_1^{-1}(s) = \frac{s}{\frac{s}{M_S} + \omega_n}$$

که ω_n و M_S را می توان از رابطه بالا تعیین کرد.

به صورت دیگر تابع حساسیت در فرکانس های بالا باید کوچک تر از M_S باشد و اغتشاش را حذف کند و این را می توان از رابطه بالا تعیین کرد.

در فرکانس‌های پایین (مانند کار) نیز مقدار تابع حساسیت باید نزدیک به صفر باشد تا سیستم به حالت پایداری برسد. و خطای حالت ماندگار را در این سیستم تحمل نشود. پس می‌توان گفت:

$$W_1(s) = \frac{\frac{s}{\mu_s} + \omega_b}{s}$$

به دلیل مشکلاتی که برای سازه‌ها به وجود می‌آید، باید این مقدار

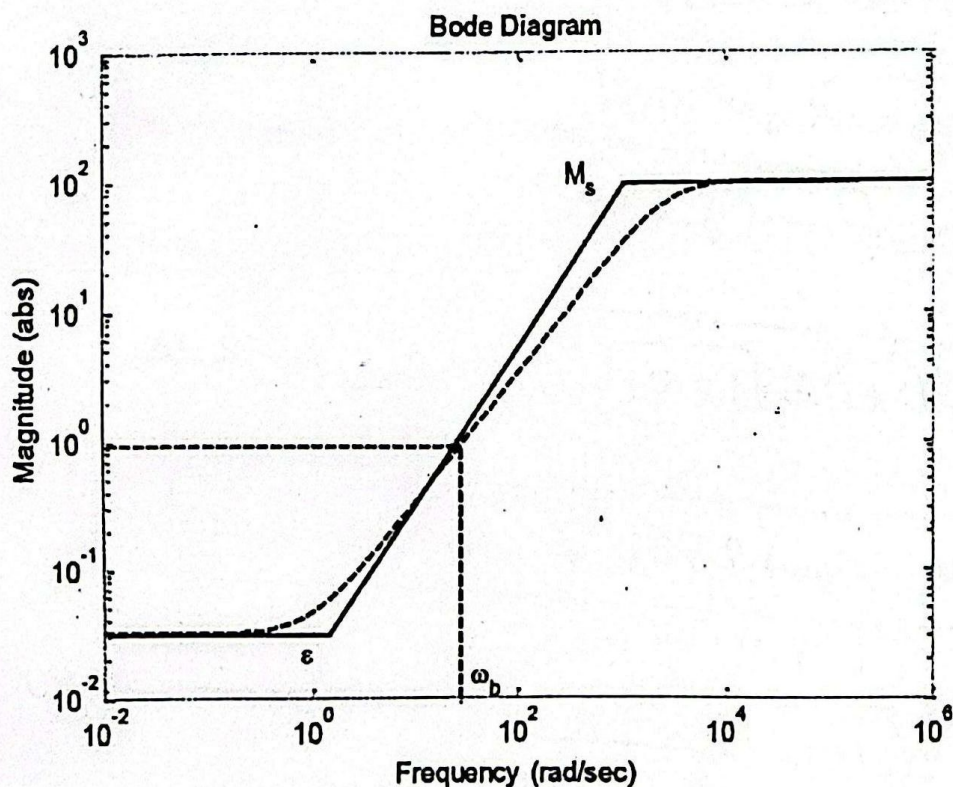
کوچک ϵ در نظر گرفته شده. و فرض می‌شود که $\epsilon \ll |S(\omega)|$. در این حالت نیز قطب تابع وزنی

بسیار نزدیک به صفر خواهد شد. بنابراین خطای حالت ماندگار صفر خواهد بود و رابطه بالا به شکل زیر

$$W_1(s) = \frac{\frac{s}{\mu_s} + \omega_b}{s + \omega_b \epsilon}$$

اصحاح می‌شود:

رابطه $W_1^{-1}(s)$ در شکل زیر نشان داده شده است:



منحنی تابع وزنی معکوس $W_1^{-1}(s)$

(61)

در بعضی از موارد جهت اصلاح کارایی از تابع وزنی مرتبه n ام به شکل زیر استفاده می شود:

$$W_1(s) = \frac{\left(\frac{s}{\sqrt[n]{\mu_s}} + \omega_0 \right)^n}{\left(s + \omega_0 \sqrt[n]{\mu_s} \right)^n}$$

یکی دیگر از معیارهای عملکرد در سیستم پیچور وانه به صورت زیر تعریف شده است:

$$\|W_u U\|_\infty = \|W_u K S\|_\infty < 1$$

این معیار تفسیر فیزیکی کوچک بودن تلاطمی (اثر نویز سیستم کنترل) است. به مقدار برقراری این معیار، تابع تبدیل U باید کوچکتر از معکوس تابع فرنی $W_u(s)$ باشد. به عبارت دیگر آرستوان $W_u^{-1}(s)$ را به اندازه کافی نزدیک انتخاب کرد، به گونه ای که بتوان با U آید. این نتیجه خواهد داشت. هر قدر این مقدار کوچک باشد محدودیت انتخاب عملکرد به وجود خواهد آمد.

در عمل معمولاً این تابع وزنی در حالت s ده برابر مقدار s ثابت که متناسب با حد اشباع

$$W_u(s) = \frac{c}{s + c}$$

عملگر است. این به صورت زیر می شود:

می توان از آلفای تابع وزنی $W_u(s)$ به صورت زیر تعریف استفاده نمود. در این منظور باید رفتار فرکانسی

عملگر را استخراج شود. در بسیاری موارد این آلفای وزنی مشابه رابطه زیر است:

$$U(s) \leq W_u^{-1}(s) = \frac{\omega_{bc}}{s + \omega_{bc}/\mu_u}, \quad s = j\omega, \quad \forall \omega$$

که عملکرد در حالت پایدار به مقدار فرکانسی خودی زده و لذا در فرکانس های پایین معمولاً قابل استفاده است. در فرکانس های بالا ضریب کارایی ندارد.

حال چنانچه در فرکانس های پایین (حالت ماندگار) با توجه به KMu یا $U(s)$ مقدار
 پهنای باند می شود به یک عملکرد توان بالا نزدیک شدیم.

فرض می کنیم Mu حداکثر تابع عملکرد است که منع نمی باشد. مقایسه می کنیم در فرکانس های بالا
 (فرکانس های انتقالی) عملکرد این کارایی ندارد لذا مقدار $U(s)$ نزدیک به صفر یا مقدار کوچک
 مانند ϵ می شود. پس Wu به شکل زیر خواهد بود با نام فرکانس بالا

$$Wu(s) = \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{\mu_u}}{\epsilon_1 s + \omega_{bc}}$$

در این رابطه هر چه فرکانس بالا

بالاتر می رود اثرات عملکرد در بازه وسیعتری

در شواهد کارایی می توان عمل کرده و به عبارت دیگر سرعته می توان به حالت پایدار برسد.

می توان از تابع وزنی مرتبه n ام نیز به شکل زیر استفاده نمود:

$$Wu(s) = \frac{\left(s + \frac{\omega_{bc}}{\sqrt[n]{\mu_u}}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{\epsilon_1} s + \omega_{bc}\right)^n}$$

در سیستم های Mu می توان از همین «یک» استفاده نمود و یک بار پس قطری از وزن های
 $W_1(s)$ و $Wu(s)$ ساخت.

* آلفای تابع وزنی بر حسب بهره $d.c.$ ، فرکانس عبور و بهره فرکانس بالا

به منظور ساخت توابع وزنی مرتبه یک با بهره $d.c.$ ، فرکانس عبور (cross over) بهره

فرکانس بالا از تابع تبدیل زیر استفاده می شود:

$$W(s) = \frac{as + b}{s + c}$$

69

در این تابع تبدیل اگر خواهم متغیر زیر برقرار باشد:

$$G(z) = d.c. \quad |G(j\omega_c)| = 1 \quad G(0) = a$$

پارامترهای تابع تبدیل را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$b = \sqrt{\frac{(\omega_c)^2 - (a\omega_c)^2}{1 - (1/d.c.)^2}} \quad c = \frac{b}{d.c.}$$

در Matlab از دستور makezweight برای یافتن توابع درونی می توان استفاده نمود:

$$DC = 0.1;$$

$$\omega_c = 20;$$

$$\omega_{ghf} = 10;$$

$$W = \text{makezweight}(DC, \omega_c, \omega_{ghf});$$

فرکانس

$\Rightarrow$

منته

Transfer function:

$$\frac{10s + 20}{s + 200}$$

حالتی ۲۶

این آلتون تابع درونی بر حسب ضرایب معیاری و فرکانس طبیعی

اگر مدل مطلوب یک تابع متغیر حساسیت به شکل زیر بیان شود:

$$T_{id} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

می توانیم به راحتی به این دو آس می توان نوشت:

$$S_{id} = 1 - T_{id}(s)$$

$$S_{id} = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

لذا به منظور تعیین کارایی های $W_1(s)$ تابع درونی مطلوب عکس اینده فوق را به

$$W_1(s) = a \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s}$$

a فرم قابل تنظیم و به اندازه می باشد

در این حالت می توانیم به راحتی به این نتیجه برسیم

(تجزیه)

کتاب: محروم از آنکه تابع f تحلیل است متغیر کسری و انتفا در زمینه کوشی
نشان دهید اشغال همان زیر بر این منحنی 151 بر این 151 است.

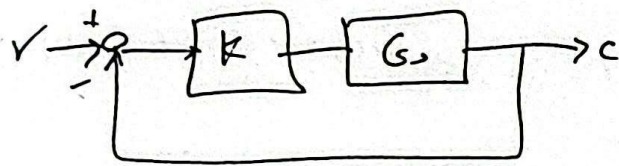
$$f(s) = \frac{s^2}{s-3}$$

نقش صفر در پاسخ گذر سیستم

$$G_0 = \frac{s+1}{s+3}$$

(I) بلده کردن انتقال

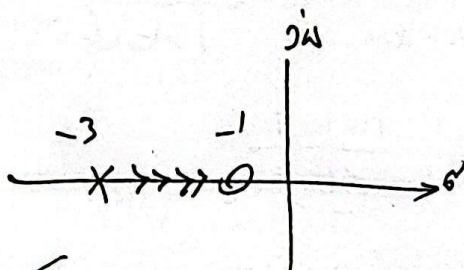
$$s = -1 \rightarrow y = 0$$



(II) برای دسی مطلب به لان $K \rightarrow \infty$

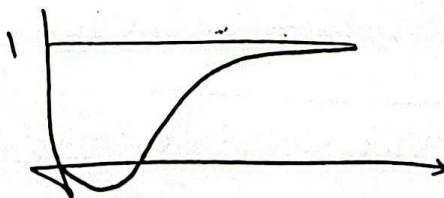
$$\begin{aligned} \text{مقدار سته} = \frac{C}{R} &= \frac{K \frac{s+1}{s+3}}{1 + K \frac{s+1}{s+3}} \\ &= \frac{K(s+1)}{(s+3) + K(s+1)} \end{aligned}$$

$$K \rightarrow \infty \quad \frac{C}{R} = \frac{s+1}{s+1}$$



(III) undershoot : صفر پاسخ (نفرگنه فاز) می تواند به زیر undershoot شود

$$\frac{1-s}{s(s+1)(s+3)} \Rightarrow y(t) = 1 + 3e^{-2t} - 4e^{-3t}$$

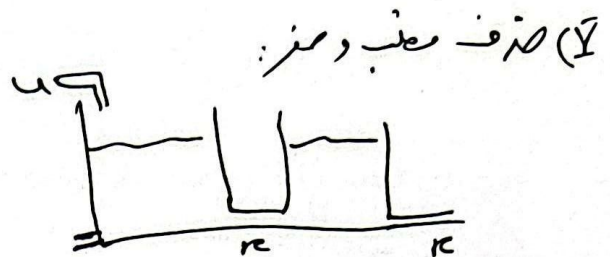


(IV) سده یا ناسره بلده سته $m < n$

$$\frac{s+1}{s^2 + 9s + 20}$$

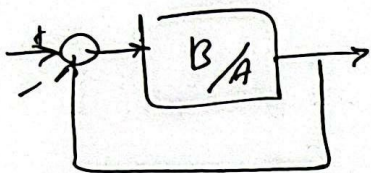
نمودار آئینه دبرته واحد سته نمودار یکبار =
درجه سته دوم سته سته درجه اول است

$$\frac{s+1}{s^2+4s+2} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_1 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

(VI) عملیات در فضای حالت:



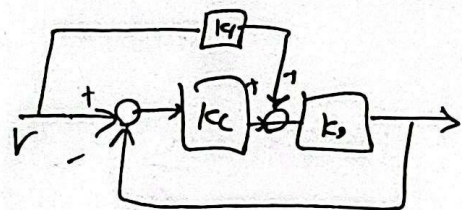
$$G = B/A \Rightarrow$$

$$G_{cl} = \frac{k B(s)}{A(s) + k B(s)}$$

(VII) تاثیر در سطح های معکوس، صف: نقطه شکست بین سیستم

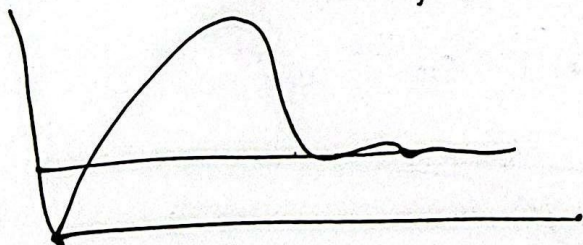
$$y = \frac{k_c k_o}{1 + k_c k_o} r + \frac{k_o}{1 + k_o k_c} v$$

$$\Rightarrow k_r = \frac{1 + k_o k_c}{k_o}$$



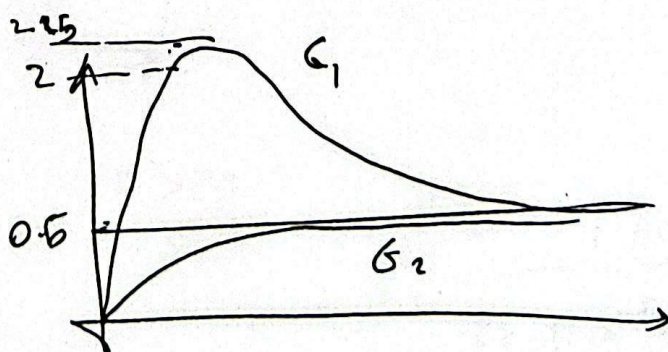
$$y = k_c k_o r \Rightarrow k_{cs} = k_o$$

(VIII) صف های پایداری و ترکیب مدار: فرایند های پایداری



$$G_1 = \frac{s+1}{s^2+4s+2}$$

$$G_2 = \frac{s+1}{s^2+4s+2}$$



* حل این مسئله عمومی تنظیم:

با توجه به موارد گفته شده در بخش های قبل، به خصوص به نحو است نامشخصی در این بخش، به بررسی سیستم های کنترل، معیارهای پایداری و کارایی به صورت زیر استخراج شدند:

• رویه پایداری معیار $\|W_2 T\|_\infty < 1$

• معیار کارایی نامی به صورت $\|W_1 S\|_\infty < 1$ و معیار پایداری

• معیار کارایی معیار در صورت وجود پایداری معیار: $\|W_1 S\|_\infty + \|W_2 T\|_\infty < 1$

حل دقیق معیار پایداری معیار کارایی نامی به صورت مشکل بود. در اینجا به کنترل معیار معیار معیار

زیر با عنوان مسئله حساسیت مخلوط (mixed sensitivity problem) جایگزینی شود.

$$\|T\|_\infty = \left\| \frac{W_1 S}{W_2 T} \right\|_\infty < 1$$

مسئله حساسیت مخلوط دقیقاً معادل کارایی معیار نامی بود.
در لحاظ حل این مسئله است. اینجا به بررسی

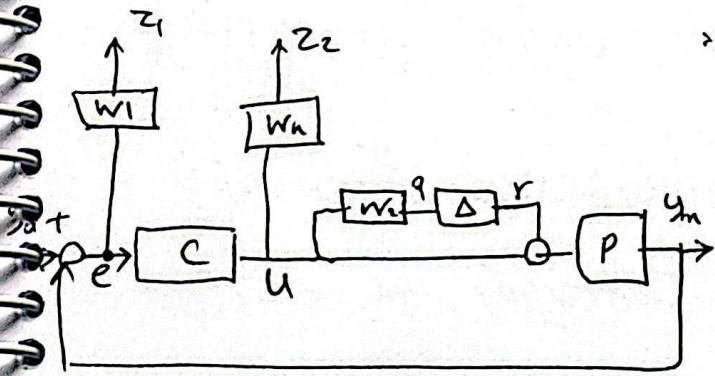
معیار پایداری معیار کارایی نامی به صورت نرم عاریت تبدیل می شود. در اینجا به بررسی کارایی نامی،
پایخ می آید. در کارایی نامی معیار را بررسی است.

در ادامه روش های برای یافتن $\|T\|_\infty$ ارائه شد که به سبب بررسی رابطه فوق می شوند. مشاهده می آید که این
بک راه کارهای برای حل این مسئله پیچیده است. به گونه ای که امکان حل مسائل در این زمینه در مواردی

وجود ندارد. در این موارد می توانیم روشی تنظیم را به کار ببریم که این روش به این صورت است:

$$\min_{K(s)} \|T_{2u}\|$$

* تبدیل س به طایقی تمام می باشد نه محوس تنظیم



به منظور تبدیل س به طایقی تمام می باشد نه محوس
تنظیم نه می باشد حساسیت خلوط س در درجه اول است
مردود است شکل را در نظر بگیرید

$$\|T_{y_m y_d}\|_{\infty} = \|W_2 T\|_{\infty} < 1$$

س به تبدیل می باشد از درجه اول به خوبی y_m

$$\|T_{z_1 y_d}\|_{\infty} = \|W_1 S\|_{\infty} < 1$$

س به تبدیل می باشد از درجه اول به خوبی e

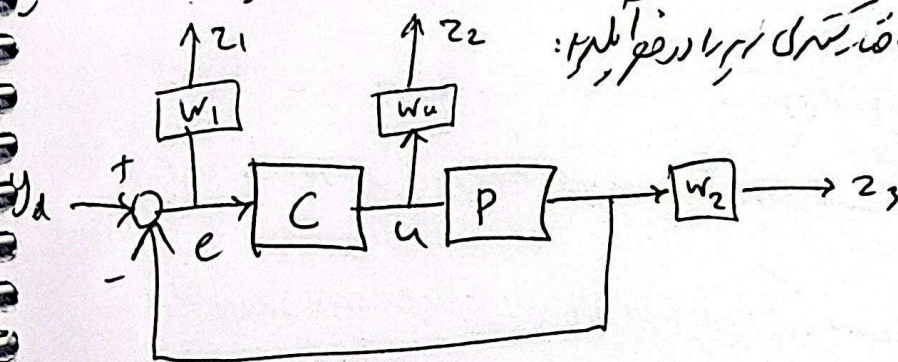
$$\|T_{z_2 y_d}\|_{\infty} = \|W_u U\|_{\infty} < 1$$

س به تبدیل می باشد از درجه اول به خوبی u

$$\left\| \frac{W_1 S}{W_u U} \right\|_{\infty} < 1$$

س درجه اول به خوبی با یکدیگر

حال به منظور اطمینان حاصل کردن تمام دست نه محوس تنظیم و تعیین کوابج تبدیل می باشد فواید نامحدود
ضروری را در شکل حذف نموده، س فواید تبدیل را در نظر بگیرید



• س به تبدیل از y_d به z_1 برابر می باشد و درجه اول به خوبی است

$$T_{z_1 y_d} = \frac{W_1}{1+CP} = W_1 S$$

• س به تبدیل از y_d به z_2 برابر می باشد و درجه اول به خوبی است

$$T_{z_2 y_d} = \frac{W_u C}{1+CP} = W_u C S = W_u P^{-1} T = W_u U$$

(64)

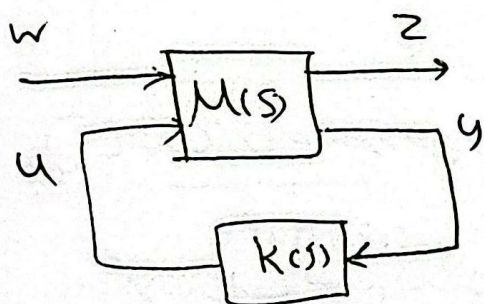
تابع تبدیل از W به Z برابر با سید ریادون مقام مطابق به تقسیم می شود کوچک است و

$$T_{zyd} = \frac{W_2 CP}{1 + CP} \cdot W_2 T$$

چون به مخرج W که طاقی تبدیل به سید انجور کنترل کننده است و شرط برابر آوردن W دارد:

$$\|T_{zyd}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_u U \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

به تبدیل مساله طاقی مقام به پیکربندی استاندارد:



در شکل کنترل کننده K به کندهای ارسیم M می باشد

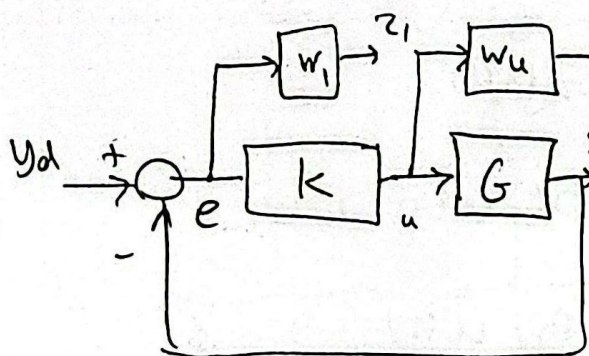
که کنترل های ورودی - خروجی عبارت باشند از:

$W(s)$: ورودی های برداری (امتیاز، نیرو، میدان مغناطیسی...)

$U(s)$: ورودی های کنترلی (ارتدادی کنترلی)

$Z(s)$: خروجی های تنظیم شونده (خروجی کنترلی)

$Y(s)$: خروجی اندر راه گیری شده (خروجی سیستم)



$$\begin{cases} W = y_d, & U = u \end{cases}$$

$$Z = \begin{bmatrix} u \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad Y = e$$

با توجه به مطالب گفته شده در بخش پیکربندی استاندارد داریم:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W_1 G \\ W_u \\ W_2 G \\ -G \end{bmatrix}$$

$$Z = (M_{11} + M_{12} K (I - M_{22} K)^{-1} M_{21}) w$$

$$Z = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_u K S \\ W_2 T \end{bmatrix} y_d$$

$$\Rightarrow \|T_{ZW}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_u K S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

صحت دارد پس خود که این را با (دیاگرام بلوک) فرود مندرج در یک سیستم می توان نوشت:

* آسان است این به منظور حل بهینه M می توان نوشت:

از معادلات سیستم در شکل است که در فضای حالت صورت زیر در نظر گرفته شوند:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ Z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{cases}$$

با توجه به اینکه بین فضای حالت سیستم تکمیل یافته M برابر است با:

$$M = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix}$$

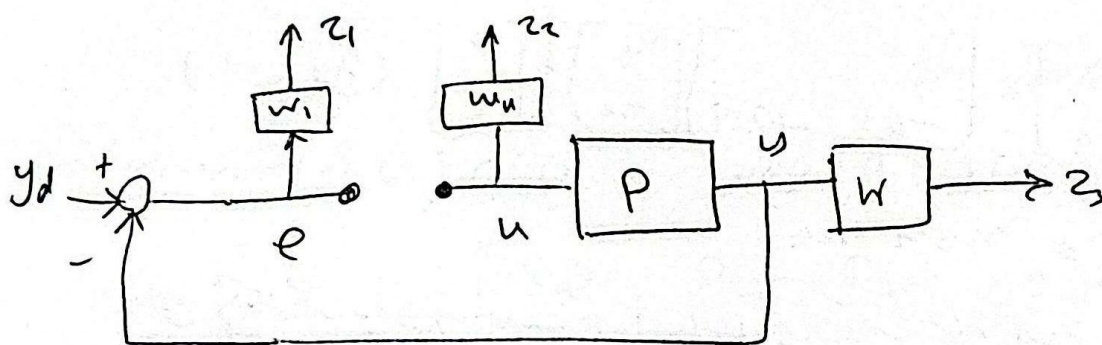
به منظور این که این سیستم کنترل کننده K بتواند در M حساسیت یک درجه (و یا هر سیستمی با حساسیت K) می توان از روش های زیر استفاده نمود:

(65)

● حل مسئله کنترل H_2 ● حل مسئله کنترل H_∞ ● حل مسئله کنترل ترکیبی H_2 و H_∞

→ نحوه استخراج معادلات:

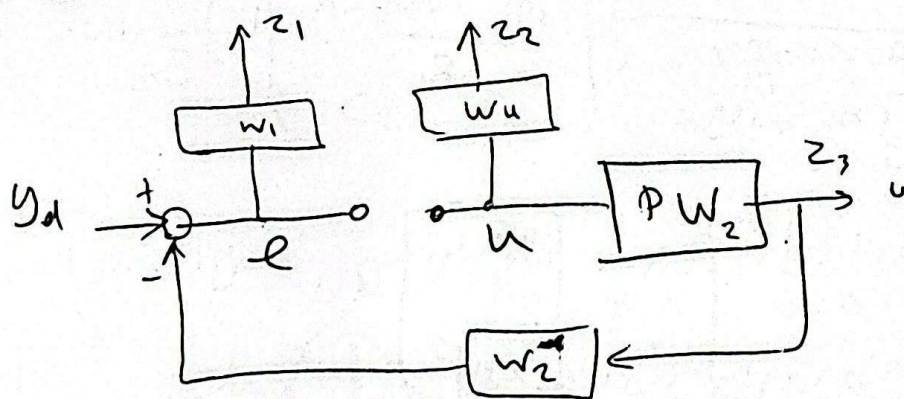
مثال: مساله حساسیت یک سیستم را در نظر بگیرید. دانه به شکل یک پیکرزننده است. اندازه تغییرات یکسان



$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}, \quad w_1 = \frac{s+1}{s(s+10)}, \quad w_u = 1, \quad w_2 = 2 \times 10^{-3} (s+10)^2$$

با توجه به مقدار w_2 نمی توان به دلیل عدم سهولت در به شکل فضای حالت نوشته شود. لذا تابع تبدیل

P و به همراه هم ترکیب می کنیم.



$$\frac{z_3}{u} = \frac{2 \times 10^{-3} (s^2 + 20s + 100)}{s^2 + 0.2s + 1} = 2 \times 10^{-3} \left(1 + \frac{19.8s + 99}{s^2 + 0.2s + 1} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 \quad e = y_d - x_1$$

$$z_3 = 2 \times 10^{-3} (99x_1 + 19.8x_2) + 2 \times 10^{-3} u$$

$$\frac{Z_1}{e} = W_1(s) = \frac{s+1}{s(s+1.0)}$$

همچنین:

بنا بر این به این معنی که هر دو ورودی است
لذا برای این که شرایط کنترول مقادیر
بسیار خوب شود، هر دو ورودی مستقل

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{e} = W_1(s) &= \frac{s+1}{(s+0.01)(s+1.0)} \\ &= \frac{s+1}{s^2 + 10.01s + 0.1} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -10.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (y_d - x_1)$$

$$Z_1 = x_3 + x_4$$

پس $y_d = W$ به شرطی که این ماتریس در فضای حالت برای این خاصیت

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -0.1 & -10.01 \end{bmatrix}}_A \underbrace{x}_{p_{21}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_1} y_d + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2} x + \underbrace{1}_{p_{21}} y_d$$

$$Z = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +0.198 & 0.0396 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \times 10^{-3} \end{bmatrix}}_{D_{12}} u$$

$$D_{22} = 0, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* حل بهینه مسأله کنترل H_2 : به روش زیر می‌توان:

به منظور حل بهینه مسأله کنترل H_2 که اصطلاحاً به آن (ایمی دتشره H_2 نیز گفته می‌شود) ^{Synthesis} می‌گویند، می‌توان قضیه زیر را به کار برد. این قضیه را می‌توان به روش زیر اثبات نمود.

* قضیه ایمی دتشره H_2 :

- ماتریس‌های (A, B_2) پایدار، نیمه پایدار و ماتریس‌های (A, C_2) مشهود، نیمه پایدار.
- ماتریس‌های $D_{11} = 0$ ، $D_{22} = 0$ ، $D_{12}^T D_{22} > 0$ ، $D_{21}^T D_{12} > 0$ ، $D_{21}^T D_{21} > 0$ باشد.

• برای تمامی فرکانس‌های ω :

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} A - j\omega L & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = \text{number of columns}$$

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} A - j\omega L & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = \text{number of rows.}$$

آنگاه تابع تبدیل $K(s)$ به شکل زیر حل بهینه H_2 برای مسائل به شکل استاندارد، ایمی دتشره گفته می‌شود که توسط آن سطح حلقه بسته پایدار، وترم دم، بهترین تبدیل $\|z\|_2$ گفته می‌شود.

$$K(s) = -L_1 (sI - A - B_2 L_1 - L_2 C_2)^T L_2$$

و دتان L_1 و L_2 برابر هستند با:

$$L_1 = -(D_{12}^T D_{22})^{-1} (B_2^T S_1 + D_{12}^T C_1)$$

$$L_2 = -(S_2 C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21}^T D_{21})^{-1}$$

همچنین: S_1 و S_2 از معادلات زیر به دست می آید:

$$A - B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)^T S_1 + S_1 (A - B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T C_1)$$

$$- S_1 B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T S_1 + C_1^T (I - D_{12} (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T) C_1 = 0$$

$$(A - B_1 D_{21}^T (D_{21}^T D_{21})^{-1} D_{21}^T C_2)^T S_2 + S_2 (A - B_1 D_{21}^T (D_{21}^T D_{21})^{-1} D_{21}^T C_2)$$

$$- S_2 C_2^T (D_{21}^T D_{21})^{-1} C_2 S_2 + B_1^T (I - D_{21} (D_{21}^T D_{21})^{-1} D_{21}^T) B_1 = 0$$

حل بسته معادله کنترل H_2 را پس طراح کنترل کننده به دست می آید. LQR القابات.
 به خصوص اینکه کلیه متغیرهای حالت در درجه اول نسبت و نیز پیچیدگی درجه اولی در معادله سیستم دارد. این امر
 از یک فیلتر بهینه LQG در یک قدمه کنترل کننده استفاده می شود. به این ترتیب مراحل طراحی
 کنترل کننده بهینه به صورت زیر است:

1- کنترل کننده حالت: در ابتدا برای سیستم زیر با معادله کارایی مرتبه مشخص دادیم، کنترل کننده
 LQR طراحی می شود و به کنترل کننده استفاده می شود. با حل معادله ریاضی متغیر تعیین می شود.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \int_0^\infty [x^T \quad u^T] \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T D_{12} \\ D_{12}^T C_1 & D_{12}^T D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt.$$

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

(67)

۲- فیلتر کالمن اینده، سپس طایفه رگرسیون LQR را با استفاده از صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bw$$

$$y = Cx + Dv$$

که در آن به ترتیب کواریانس اختلال در مدل و مشاهده برابر است با:

$$E \left(\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T & v^T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 D_{21}^T \\ D_{21} B_1^T & D_{21} D_{21}^T \end{bmatrix}$$

ماتریس بهره فیلتر کالمن G حاصل می‌شود

۳- ضرایب فیلتر کالمن از ترکیب پیچیده با حالت های تکمیل زده و به صورت

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + G(y - D_{22}u - C_2\hat{x})$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - B_2 k - G C_2 + G D_{22} k) \hat{x} + G y$$

$$u = -k \hat{x}$$

۴- نرم‌سازی مستطیل اینده از این شده: نرم دوم به ترتیب تبدیل به N و N به N می‌شود و از این خواهد بود

آن را می‌توان به دو بخش کنترل کننده و فیلتر تجزیه نمود

$$\min \|T_{zw}\|_2^2 = \|T_c\|_2^2 + \|T_f\|_2^2$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - B_2 k) \tilde{x} + B_1 w \quad T_c \text{ بخش کنترل کننده}$$

$$z = (C_1 - D_{12} k) \tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - G C_2) \tilde{x} + (B_1 - G D_{21}) w \quad T_f \text{ مربوط به فیلتر کالمن}$$

$$v = K(\tilde{x}) \longrightarrow \text{حداکثر کمین فیلتر}$$

علیرغم خدایست های کنترل کننده H_2 در کاربردهای مختلف، با توجه به اینکه هیچ قضیه ای در خصوص
 تعیین پایداری این مقام سیستم با نرم هم در دسترس نمی توان یافت، این سیستم در خصوص پایداری مدل
 از این حاصل نمود.

در صورتی که انتفا در اصل مسائل با H_2 در تبیین دستور، $h_2 \text{ syn}$ است.

مثال: یک سیستم با شش ورودی و یک خروجی H_2 کنترل کننده ای برای آن طراحی شود.

$$M(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [-2 \quad 9 \quad 4] \quad C_2 = [6 \quad 3 \quad -1]$$

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = 1, \quad D_{21} = 2, \quad D_{22} = 0$$

حل: ابتدا فرض:

• ماتریس های (A, B_1) پایدار نیستند و ماتریس های (A, C_1) مشهود نیستند.

$$D_{21} D_{21}^T = 4 > 0, \quad D_{12}^T D_{12} = 1 > 0, \quad D_{22} = 0, \quad D_{11} = 0$$

• برای $\omega = 0$

$$\text{Rank} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = 4$$

$$\text{Rank} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = 4$$

• پس شرط پایداری است.

(68)

$$S_1 = 0 \quad S_2 = 0$$

برای ساس

$$L_1 = [-2 \quad -9 \quad 4]$$

$$L_2 = [-3.5 \quad 1.5 \quad -0.5]^T$$

$$K(s) = -L_1 (sI - A - B_2 L_1 - L_2 L_2)^{-1} L_2$$

لذا تابع K را برابر با این می‌گیریم:

$$= \frac{18.5s^2 + 125s + 334.5}{s^3 + 66s^2 + 2275s + 9666}$$

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} -11 & -62 & -24.5 \\ 25 & -70.5 & -33.5 \\ -13 & -50.5 & 19.5 \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} -3.5 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} u$$

که به شکل فضای حالت برای است:

$$u = [-2 \quad -9 \quad 4] \eta$$

$$A = [-5 \quad 2 \quad -4; \quad 0 \quad -3 \quad 0; \quad 0 \quad 7 \quad -1]$$

$$B1 = [7; -3; 1]$$

$$B2 = [6; 8; -6]$$

$$C1 = [-2 \quad 9 \quad 4]$$

$$C2 = [6 \quad 3 \quad -1]$$

$$B = [B1 \quad B2];$$

$$C = [C1; C2]$$

$$D11 = 0$$

$$D12 = 1$$

$$D21 = 2$$

$$D22 = 0$$

$$D = [D11 \quad D12; \quad D21 \quad D22]$$

$$CO = \text{rank}(\text{ctrb}(A, B2))$$

$$OB = \text{rank}(\text{obsv}(A, C2))$$

$$[rB2 \quad cB2] = \text{size}(B2)$$

$$[rC2 \quad cC2] = \text{size}(C2)$$

$$P = \text{ss}(A, B, C, D)$$

$$[K, CL, GAM, INFO] = \text{h2syn}(P, rC2, cB2)$$

$$\text{tf}(K)$$

K =

a =

	x1	x2	x3
x1	-14	-62.5	-24.5
x2	25	-70.5	-33.5
x3	-15	59.5	23.5

b =

	u1
x1	3.5
x2	-1.5
x3	0.5

c =

	x1	x2	x3
y1	2	-9	-4

d =

	u1
y1	0

>> tf(K)

ans =

$18.5 s^2 + 125 s + 334.5$

$s^3 + 61 s^2 + 2189 s + 9933$

Continuous-time transfer function.

(69)

حل بهینه مسئله کنترلی H_{∞} : به روش ریشه‌ای

همانطور که گفته شد محوّمات را به حل مسئله از طریق حلش در دسترس قرار داد:

$$\min_{K(s)} \|N\|_{\infty} = \min_K \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_u K(s) S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

آنگاه در عمل معمولاً کافی است به جای $K(s)$ به دنبال این پیدا شود که فرم بی‌نهایت تابع تبدیل حلقه بسته $\|T_{zw}\|_{\infty}$ به اندازه کافی از عدد ریشه γ کوچک‌تر گردد.

$$\|T_{zw}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 K(s) S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma$$

یعنی همیشه به دنبال بهینه‌ترین مسئله (Supremum) می‌گردیم که همان اصل آن یافتن بهینه‌ترین $K(s)$ به شکل زیر است:

$$\gamma_0 = \min_{K(s)} \|T_{zw}\|_{\infty} = \min_K \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3 K(s) S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma < 1$$

برای بهینه‌ترین منظور حل مسئله کنترلی H_{∞} که اصطلاحاً می‌گویند H_{∞} گفته می‌شود که توان از مقیاس زیر برآید حل مسئله استاندارد کنترلی مقیاس با شرایط زیر است:

* مقیاس بهینه‌ترین کنترلی H_{∞} : اگر

• ماتریس (A, B_2) پایدار و ماتریس (A, C_2) مشاهد پذیر باشد:

• ماتریس $D_{22} = 0$ ، $D_{11} = 0$ و $D_{12}^T D_{12} > 0$ ، $D_{21}^T D_{21} > 0$ باشد.

• برای همه فرکانس ω :

$$\text{Rank} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = \text{number of columns}$$

$$\text{Rank} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = \text{number of rows}$$

آنجا تابع تبدیل $K(s)$ به صورت حل یکنواخت H برای سازه مشخص استندارد را
 این روشی است که توسط آن سیستم حلقه بسته پدید آورده می شود. ماتریس تبدیل $\|A\|$ که در
 لا شونده.

$$K(s) = M_{11}(s) + M_{12}(s) Q(s) (I - M_{22}(s) Q(s))^{-1} M_{21}(s)$$

در این رابطه $Q(s)$ هر تابع حقیقی صریحی می تواند باشد که $\|Q\|_{\infty} < \gamma$ و صرفه های

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T S_1 + B_2 L_1 + L_2 C_2 & -L_2 (I - \gamma^{-2} S_2 S_1)^{-1} B_2 & \text{برای } M_{11} \\ \hline L_1 & 0 & I \\ \hline -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

$$L_1 = -B_2^T S_1 \quad \text{همچنین } L_1 \text{ و } L_2 \text{ برابر هستند}$$

$$L_2 = -(I - \gamma^{-2} S_2 S_1)^{-1} S_2 C_2^T$$

$$A^T S_1 + S_1 A + S_1 (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) S_1 + C_1^T C_1 = 0 \quad \text{که در آن } S_1 \text{ و } S_2 \text{ برابرند}$$

$$A S_2 + S_2 A^T + S_2 (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) S_2 + B_1 B_1^T = 0$$

در وقت آنکه آر S_1 و S_2 به خنده

$$\rho(S_1, S_2) = \max |\lambda(S_1 S_2)| < \gamma^2$$

آنجا کنترل کننده $K(s)$ وجود خواهد داشت. به این معنی در این جا که کنترل کننده را
 برای آن

$$K(s) = L_2 (sI - A - \gamma^{-2} B_1 B_1^T S_1 - B_2 L_1 - L_2 C_2)^{-1} L_1$$

(70)

۱. قبل از استفاده داشتن قضیه را به شکل ماتریس زیر بیان می کنیم:

به این منظور، معادله زیر را به صورت (ARE) یا در نظر بگیرید:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Algebraic} \\ \text{Riccati} \\ \text{Equation} \end{array} \right) \quad 0$$

$$E^T X + X E - X W X + Q = 0$$

که در آن Q, W در ماتریس متقارن هستند ($Q = Q^T, W = W^T$) حال این رابطه را می توان به صورت ماتریس هیلتونین (Hamiltonian) فرض نمود:

$$H = \begin{bmatrix} E & -W \\ -Q & -E^T \end{bmatrix}$$

به این معادله در ماتریس X است که در صورت وجود متقارن و سبب پایداری $E - W X$

$$X = Ric \begin{bmatrix} E & -W \\ -Q & -E^T \end{bmatrix} \quad \text{مگر در:}$$

$$S_1 = Ric \begin{bmatrix} A & \delta^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad \text{با این معادله:}$$

$$S_2 = Ric \begin{bmatrix} A^T & \delta^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$$

و تبدیل کننده از رابطه زیر به رابطه:

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + \delta^{-2} B_1 B_1^T + B_2 L_1 + L_2 C_2 & L_2 \\ \hline \delta^{-2} L_1 & 0 \end{array} \right]$$

* در این حالت اگر $\delta \rightarrow 0$ آنگاه تبدیل $H_1 = H_2$ تبدیل می شود.

برای حل مسئله H_2 در سلب می توان از دستور hinfsyn استفاده نمود.

مثال: سیستم به شکل زیر در نظر گرفته شده تبدیل H_2 را با دستور hinfsyn حل نمایید.

$$M = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix} \quad C_1 = [-2 \ 9 \ 4] \\ C_2 = [6 \ 3 \ -1]$$

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = 1$$

$$D_{21} = 2, \quad D_{22} = 0$$

حل: بررسی فرقی که:

• ماتریس های (A, B_2) پایدار نیستند (مثلاً (A, C_2) مشاهده می شود).

• شروط ماتریس های $D_{11} = 0, D_{12} = 1, D_{21} = 2, D_{22} = 0$ را در نظر بگیرید.

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = 4$$

• بررسی می شود:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = 4$$

$A = [-5 \ 2 \ -4; \ 0 \ -3 \ 0; \ 0 \ 7 \ -1];$

$B1 = [7; \ -3; \ 1];$

$B2 = [6; \ 8; \ -6];$

$C1 = [-2 \ 9 \ 4];$

$C2 = [6 \ 3 \ -1];$

$B = [B1 \ B2];$

$C = [C1; \ C2];$

$D11 = 0; \ D12 = 1; \ D21 = 2; \ D22 = 0; \ D = [D11 \ D12; \ D21 \ D22];$

$CO = \text{rank}(\text{ctrb}(A, B2))$

$OB = \text{rank}(\text{obsv}(A, C2))$

$[rB2 \ cB2] = \text{size}(B2);$

$[rC2 \ cC2] = \text{size}(C2);$

$P = \text{ss}(A, B, C, D);$

$[K, CL, GAM, INFO] = \text{hinfsyn}(P, rC2, cB2, 'GMAX', 1000, 'GMIN', 0, 'TOLGAM',$

$0.01, 'METHOD', 'ric')$

$tf(K)$

71

KEY	VALUE	MEANING
'GMAX'	real	initial upper bound on GAM (Inf default)
'GMIN'	real	initial lower bound on GAM (0 default)
'TOLGAM'	real	relative error tolerance for GAM (.01 default)
'METHOD'		H-infinity solution method:
	'ric'	- (default) standard 2-Riccati solution, DGKF1989
	'lmi'	- LMI solution, Packard 1992, Gahinet 1994
	'maxe'	- maximum entropy, HINFSYNE, Glover-Doyle 1988
'S0'	real	(default=Inf) frequency S0 at which entropy is
		evaluated, only applies to METHOD 'maxe'
'DISPLAY'	'on/off'	display synthesis information to screen,
		(default = 'off')

K =

a =

x1 x2 x3

x1 -14 -62.5 -24.5

x2 25 -70.5 -33.5

x3 -15 59.5 23.5

b =

u1

x1 3.76

x2 -1.611

x3 0.5371

c =

x1 x2 x3

y1 1.862 -8.379 -3.724

d =

u1

y1 0

Continuous-time state-space model.

$$18.5 s^2 + 125 s + 334.5$$

$$s^3 + 61 s^2 + 2190 s + 9934$$

Continuous-time transfer function.

* حل مسئله لینه : H_∞ روش LMI

Linear matrix Inequality (LMI)

* قضیه (شماره شمر) (Schur Complement): ماتریس‌های حقیقی متناهی M, Q, R را داشته باشیم

بگیریم فرض کنیم Q, M هم رانده (Self adjoint) یعنی $(M=M^*, Q=Q^*)$ داشته باشیم

حال دو عبارت زیر را تقریباً رضی می‌کنیم:

• عبارت اول: $Q > 0$ and $M - RQ^{-1}R^* > 0$

• عبارت دوم: $\begin{bmatrix} M & R \\ R^* & Q \end{bmatrix} > 0$

* قضیه (لم کران حقیقی) (Bounded Real Lemma): برای یک ماتریس تابع انتقالی خاص به شکل زیر

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

دو عبارت زیر را تقریباً رضی می‌کنیم:

• عبارت اول: ماتریس A پایدار است و $\|G\|_\infty < 1$

• عبارت دوم: ماتریس متغیضی مانند $X > 0$ وجود دارد که X کاملاً مثبت است

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ D^T C + B^T X & D^T D - I \end{bmatrix} < 0$$

72

نتیجه قضیه: می توانیم هر سیستم حلقه بسته یکبار در این مسئله

را به دو قسمت در حالت کلی به یکدیگر بازنویسی می کنیم (Non Convex) تبدیل می شود از طرفی شرط

نکته: (فایده ماژیس P دوباره مشتق می یابیم) f که است و اگر f را در دانه اش می بینیم پس به نیت

مسئله می یابیم $(\sqrt{f})$ در صورت برآورد می یابیم و سبب می شود تا ماژیس گفته می شود همان ماژیس

گفته می شود با سبب

* قضیه: اگر ماژیس $P(s)$ به نیت $K(s)$ نشان داده شود

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right]$$

به منظور بازنویسی کردن نیت و تقوی می کنیم:

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{1e} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{2e} = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad C_{1e} = [C_1 \ 0] \quad C_{2e} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{12e} = [0 \ D_{12}] \quad D_{21e} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

$$Q(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right]$$

تا آنکه با ماژیس کردن مسئله - با اگر در ب.

$$A_c = A_e + B_{2e} Q C_{2e}$$

$$B_c = B_{1e} + B_{2e} Q D_{21e}$$

$$C_c = C_{1e} + D_{12e} Q C_{2e}$$

$$D_c = D_{11} + D_{12e} Q D_{21e}$$

و سبب حلقه بسته K به صورت زیر می آید

$$T_{zw} = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_k C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{bmatrix}$$

آنکه دو عبارت زیر از نظر فضایی معادل هستند،

عبارت اول: ماتریس A_c پایدار است و $\|T_{zw}\|_\infty < 1$

عبارت دوم: ماتریس متقارن ممانده Z وجود دارد.

$$\gamma^2 I - \begin{bmatrix} A_c^T Z + Z A_c & Z B_c & C_c^T \\ B_c^T Z & -I & D_c^T \\ C_c & D_c & -I \end{bmatrix} < 0$$

نتیجه آنکه $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ باشد آنکه $\gamma > 0$

$$\gamma > 0$$

و می توان نشان داد که تبدیل کننده $K(s)$ تحت شرایط زیر برابر با راه حل مسائل ماتریسی می باشد.

اگر n برابر 2 و $Q = R = K(s)$ است.

این شرایط بیان می کند که آرایه های Z هم شکل یکتا شود:

$$Z = \begin{bmatrix} X & Y_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix}, \quad Z^{-1} = \begin{bmatrix} Y & Y_2 \\ Y_2^T & Y_3 \end{bmatrix}$$

$$X - Y^{-1} = X_2 X_2^T$$

و نیز $Y_2 = X_2$

(73)

$$Z = \begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & I \end{bmatrix}$$

در ادامه به شرح:

مسئله حل کردن معادله پیکه بالاست و نیازمند یک سیستم نرم افزار است.

مثال تمرین حل را با استفاده از LMI حل کنید.

```

A=[-5 2 -4 ; 0 -3 0 ; 0 7 -1];
B1=[7 ; -3 ; 1];
B2=[6 ; 8 ; -6];
C1=[-2 9 4];
C2=[6 3 -1];
B=[B1 B2];
C=[C1 ; C2];
D11=0 ; D12=1; D21=2; D22=0; D=[D11 D12; D21 D22];
CO = rank(ctrb(A,B2))
OB = rank(observ(A,C2))
[rB2 cB2]=size(B2);
[rC2 cC2]=size(C2);
P=ss(A,B,C,D);
[K,CL,GAM,INFO]=hinfsyn(P,rC2,cB2,'TOLGAM',0.01,'METHOD','lmi')
tf(K)

```

```

K =
a =
      x1      x2      x3
x1 -53.41 -15.04 -49.71
x2  58.51  19.77  73.19
x3   8.882 -13.71 -27.37

```

```

b =
      u1
x1   1.577
x2  -0.1838
x3  -3.497

```

```

c =
      x1      x2      x3
y1 -5.844 -2.459 -7.797

```

```

d =
      u1
y1   0

```

ans =

$$\frac{18.5 s^2 + 125 s + 334.5}{s^3 + 61 s^2 + 2190 s + 9934}$$

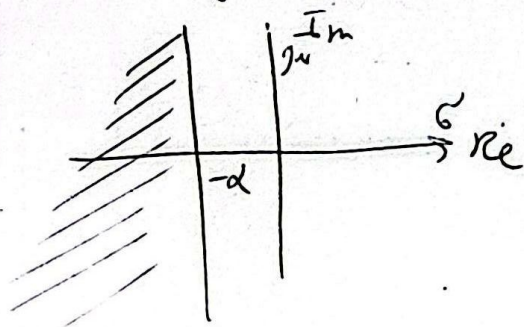
Continuous-time transfer function.

* حل مسئله کنترلی H_∞ : به روش LMI با قید جابجایی معکوس

تعریف ناحیه LMI: هر زیر مجموعه D در سمت چپ صفحه مختلط، ناحیه LMI گفته می شود اگر مرتبش باشد 2 با ابعاد $m \times m$ و مرتبش افقی M با ابعاد $m \times m$ و عدد

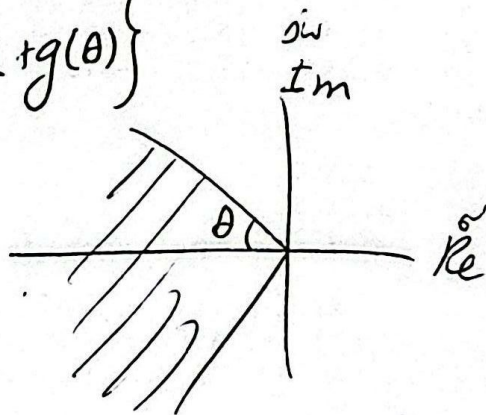
$$D = \{z \in D \mid L + zM + \bar{z}M^T < 0\} \quad \text{داشته باشند تا اینکه:}$$

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < -\alpha\} \quad \text{مثال: منطقه LMI نیم صفحه}$$



مثال: منطقه LMI قطاع مخروط

$$D_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0, \frac{|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Re} z|} < \tan(\theta)\right\}$$



مثال: پس تعریف مناطق LMI با نرم افزار متلب و اسکریپت minireg است

کنترل

7A

>> region=lmireg

Select a region among the following:

- h) Half-plane
- d) Disk
- c) Conic sector
- e) Ellipsoid
- p) Parabola
- s) Horizontal strip
- m) Matrix description of the LMI region
- q) Quit

choice: h

Orientation ($x < x_0 \rightarrow 1$, $x > x_0 \rightarrow r$): 1

Specify x_0 : -4

Select a region among the following:

- h) Half-plane
- d) Disk
- c) Conic sector
- e) Ellipsoid
- p) Parabola
- s) Horizontal strip
- m) Matrix description of the LMI region
- q) Quit

choice: q

region =

8 +

1i

1 +

0i

* تعریف تابع مستقیم: هم تابع ماتریس مقدار زیر، تابع مستقیم D گفته می شود

$$f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T$$

اگر ضرایب L و M به شکل زیر تعریف شوند،
 $L = (l_{ke})$ و $M = (m_{ke})$

بین تابع مستقیم برابر خواهد بود (با):
 $f_D(z) = l_{ke} + m_{ke}z + m_{ke}^T \bar{z}$

* تعریف: ماتریس A ، پایدار D گفته می شود اگر مقادیر ویژه آن در صفحه ناحیه D در زیرین

حال می توان این تعریف را به مفاهیم LMI و قضیه زیر مربوط نمود:

* قضیه: ماتریس A ، پایدار D گفته می شود اگر و تنها اگر ماتریس مقادیر مانند $X > 0$

وجود داشته باشد تا اینکه:
 $M_0(A, X) = AX + XA^T < 0$

با این تعریف را می توان و قضیه مورد نیاز را به دست زیر بیان نمود:

* قضیه کنترل کننده $K(s)$ به شکل زیر ارائه می گردد:

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right]$$

این کنترل را می توان برای نامعادله ماتریس خطی زیر:

$$\left[\begin{array}{ccc} A_c^T z + z A_c & z B_c & C_c^T \\ B_c^T z & -I & D_c^T \\ C_c & D_c & -\gamma I^2 \end{array} \right] < 0$$

(75) $M_D(A_C X) < 0$ and $\|T_w\|_\infty < \gamma$ به گونه ای پیدا شود که شرایط زیر برقرار باشد

آردتق اثرات پس های A_{k2} , B_{k2} , C_{k2} , D_{k2} را شکل زیر درج شده باشد

$$B_{k2} = Y_2 B_k + Y B_2 D_k$$

$$C_{k2} = C_k X_2^T + D_k C_2 X$$

$$A_{k2} = Y_2 A_k X_2^T + Y_2 B_k C_2 X + Y B_k C_k X_2^T + Y (A + B_2 D_k C_2) X$$

و متغیرهای مقایسه X , Y با شرایط زیر درج شده باشد:

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad \lambda_{k2} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} + M_{k2} \varphi + M_{k2}^T \varphi^T < 0$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0$$

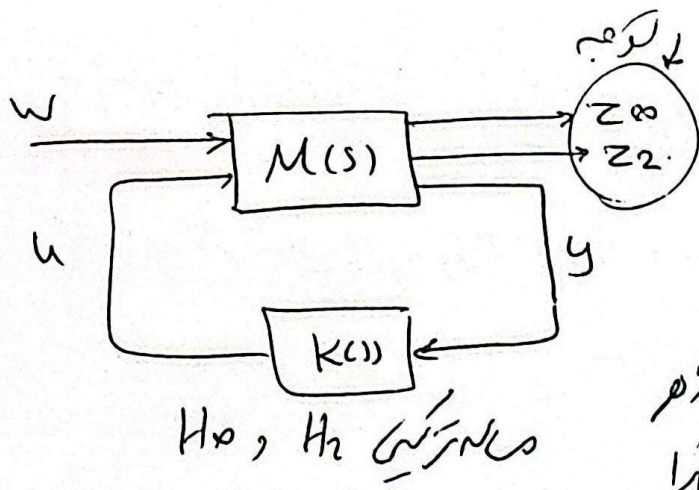
که در آن:

$$\varphi = \begin{bmatrix} AX + B_2 C_k & A + B_2 D_k C_2 \\ A_{k2} & YA + B_{k2} C_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2 C_{k2} + C_{k2}^T B_2^T & B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ (B_1 + B_2 D_k D_{21})^T & -\gamma I \end{bmatrix} > 0$$

$$\Psi_{21} = \begin{bmatrix} A_{k2} + (A + B_2 D_k C_2)^T & Y B_1 + B_{k2} D_{21} \\ C_1 X + D_{k2} C_{k2} & D_{k1} + D_{k2} D_k D_{21} \end{bmatrix} > 0$$

$$\Psi_{22} = \begin{bmatrix} A^T Y + YA + B_{k2} C_2 + C_2^T B_{k2}^T & (C_1 + D_{k2} D_k C_2)^T \\ C_1 + D_{k2} D_k C_2 & -\gamma I \end{bmatrix} > 0$$



* حل مسائل ترکیبی H_1 و H_2 :

شکل زیر در نظر بگیرید:

می‌توان با توجه به نوع انتقال فرقی از هم در نرم H_2 و H_∞ می‌برد $\|T_{zw}\|_2$ یا

به صورت ترکیبی بهینه‌شود. در این شکل معادلات حاکم عبارتند از:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t)$$

$$z_1(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t)$$

$$z_2(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t)$$

$$y(t) = C_3 x(t) + D_{31} w(t) + D_{32} u(t)$$

حل آردیف α مستقل تعیین نرم کمینه نرم H_2 و ضریب β

مستقل تعیین نرم کمینه نرم H_2 برای تعیین کتر در $K(s)$ نویف

$$\min_{K(s)} \left[\alpha \|T_{z_1 w}\|_\infty^2 + \beta \|T_{z_2 w}\|_2^2 \right]$$

همچنین در این کمینه می‌توانیم نرم اضافه شوند.

• قدر اول: مقدار نرم H_2 با کمینه از α کرد

$$\|T_{z_1 w}\|_\infty < \gamma_0$$

• قدر دوم: مقدار نرم H_2 با کمینه از β کرد

$$\|T_{z_2 w}\|_\infty < \gamma_0$$

(70)

● قدار هم: قطب های حلقه سید باید در منطقه 0 ارزش تفسیر شده معادلات خط
کش خطی قرار نگیرد.

ارزش من حیث مساله ای در سلب h_2hinf_{syn} و همچنین $hinf_{min}$ می باشد.

`[K,CL,NORMZ,INFO] = h2hinfsyn(P,NMEAS,NCON,NZ2,WZ,key1,value1,...)`

Mixed H2/H-infinity synthesis with regional pole-placement constraints.

Given an LTI plant P with partitioned state-space form:

$$dx/dt = A * x + B1 * w + B2 * u$$

$$zinf = Ci * x + Di1 * w + Di2 * u$$

$$z2 = C2 * x + D21 * w + D22 * u$$

$$y = Cy * x + Dy1 * w + Dy2 * u$$

$h2hinf_{syn}$ employs LMI techniques to compute an output-feedback control

law $u = K(s)*y$ that

* keeps the HINFNORM gain G from w to zinf below the value OBJ(1)

* keeps the H2NORM H from w to z2 below the value OBJ(2)

* minimizes a trade-off criterion of the form

$$WEIGHT(1) * G^2 + WEIGHT(2) * H^2$$

* places the closed-loop poles in the LMI region specified by REGION.

Input:

P LTI plant

NMEAS Number of measurements (length of y)

NCON Number of control channels (length of u)

NZ2 length of z2

WZ 1x2 vector of weights on zinf and z2 (i.e., weights for H-infinity and H2 performance, respectively)

Option keywords and values:

REGION Mx(2M) matrix [L,M] specifying the pole

placement region as

$$\{ z : L + z * M + \text{conj}(z) * M' < 0 \}$$

Use the interactive function LMIREG to generate

REGION. The default REGION=[] enforces just
closed-loop stability

H2MAX upper bound on the H2 norm $w \rightarrow z_2$ (default = Inf)

HINFMAX upper bound on the HINFNORM gain $w \rightarrow z_{\text{inf}}$ (default = Inf)

DKMAX bound on the norm of the

feedthrough gain DK of K(s)

(100=default, 0 yields a strictly proper controller)

TOL desired relative accuracy on the objective

value (default=1e-2)

DISPLAY 'on' displays synthesis information to screen, default 'off'

Output:

K optimal output-feedback controller

CL $\text{lft}(P, K)$ (closed-loop system)

NORMZ 1x2 vector of closed-loop norms (HINFNORM gain $w \rightarrow z_{\text{inf}}$
and H2 norm $w \rightarrow z_2$)

INFO struct array:

INFO.R solution R of LMI solvability condition

INFO.S solution S of LMI solvability condition